

Un quart de siècle pour un quart de plan

IMERA, Marseille

15 au 17 avril 2025

Présentation

La conférence *Un quart de siècle pour un quart de plan* célèbre le 25^{ème} anniversaire de la publication du livre *Random Walks in the Quarter Plane* et ses applications en combinatoire et aux diffusions réfléchies. Cet événement rend également hommage à Guy Fayolle, co-auteur de l'ouvrage.

Informations pratiques

Lieu : IMERA - *Institut Méditerranéen de Recherches Avancées*

- 2 Place Leverrier, 13004 Marseille
- Salle de conférence : Maison des Astronomes
- Deux entrées : Place Leverrier (Code : xxxxx) ou Parc Longchamp (Code : xxxxx)
- Bâtiments de la Maison neuve (Code : xxxxx) Parking (Code : xxxxx)

Hébergement : *Hôtel Azur*

- 24 Cours Franklin Roosevelt, 13001 (Code : xxxx après minuit)

Restaurants :

- Mardi 19h30 : Fioupelan, 62 quai du Port
- Mercredi 19h30 : Moga, 10 bis rue Bernex

Wifi :

- Eduroam

Organisateurs :

- Sandro Franceschi (xxxxxxxxxxxx)
- Kilian Raschel (xxxxxxxxxxxx)

Financement :

- ANR RESYST



Titres et résumés

Théo Ballu

Un théorème à la Ney et Spitzer pour des processus Markov additifs

Un célèbre théorème de Ney et Spitzer de 1966 fournit un équivalent asymptotique à l'infini des fonctions de Green des marches aléatoires décentrées sur \mathbb{Z}^d . Ils prouvent une décroissance exponentielle, avec un taux de décroissance dépendant de la direction dans laquelle on part à l'infini. Nous présenterons une version de ce théorème pour les processus Markov additifs. Ces processus sont des chaînes de Markov sur un espace d'état de la forme $\mathbb{Z}^d \times E$ généralisant les sommes iid de variables aléatoires. Ils exploitent la structure périodique de \mathbb{Z}^d tout en apportant une certaine inhomogénéité grâce à l'ensemble E , dont on dit qu'il module la chaîne. Dans le cas que nous intéressent, où l'ensemble modulant E est fini, nous retrouverons l'équivalent asymptotique du théorème de Ney et Spitzer.

Pierre Bonnet

Classification des marches à bords interactifs de genre 0

L'étude systématique des marches dans le quart de plan a fait l'objet de nombreux efforts les dix dernières années, concernant notamment la classification des marches à petits pas, qui a été achevée en 2018. Depuis, de multiples extensions ont été considérées : ajout de poids, pas de longueur arbitraire. . . L'extension considérée ici concerne la statistique du nombre de contacts avec les axes du quart de plan pour les marches à petits pas, démarrée par Beaton et Owczarek en 2020. Dans cet exposé, je présente la classification de ces marches dites « de genre 0 », qui utilise de manière cruciale la méthode de Dreyfus, Hardouin, Roques et Singer basée sur l'étude des équations aux q-différences. Contrairement aux marches sans interactions, cette étude révèle des solutions algébriques.

Alin Bostan

On the nature of generating functions for singular walks in the quarter plane

We consider "singular models" of walks in the quarter plane and their associated generating functions $Q(x, y, t)$, which enumerate such walks starting from the origin, with fixed endpoint (the spatial variables x and y) and length (the time variable t). In several recent articles, Thomas Dreyfus, Charlotte Hardouin, Julien Roques and Michael F. Singer used Galois theory of difference equations to study the nature of $Q(x, y, t)$. They proved that for any such singular model, the complete generating function $Q(x, y, t)$ is D-transcendental w.r.t. to x , to y , and to t . More precisely, they showed that for any transcendental value of t_0 in $(0, 1/\#S)$, the power series $Q(x, y, t_0)$ is differentially transcendental both in x and in y . We prove that $Q(x, y, t_0)$ can be extended to t_0 in the interval $[-1/2, 1/2]$, and that for any such value $Q(x, y, t_0)$ is x -differentially transcendental and y -differentially transcendental. We show that at the special values $t_0 = 1/2$ and $t_0 = -1/2$, the coefficients of the power series $Q(x, y, t_0)$ are related to Bernoulli numbers, from which we retrieve the x - and y - differential transcendence of $Q(x, y, t)$. Finally, we prove that $Q(-1, -1, t)$ is D-algebraic in t , which is in contrast with the (still open) conjecture that $Q(1, 1, t)$ is D-transcendental in t .

This is joint work with Lucia Di Vizio and Kilian Raschel.

Mireille Bousquet-Mélou

Chemins du quadrant et treillis des montées sur les chemins de Dyck

Plusieurs relations d'ordre définies sur les chemins de Dyck de longueur $2n$ ont été étudiées ces dernières années. L'accent a souvent été mis sur le dénombrement de leurs intervalles, qui a parfois révélé des liens avec des familles de cartes.

Nous considérons ici un nouvel ordre sur ces chemins, dont les relations de couverture sont obtenues en échangeant un pas descendant avec toute la montée qui le suit. Cet ordre est lié à un treillis plus général introduit par Nadeau et Tewari, et on en déduit qu'il est lui-même un treillis, appelé treillis des montées. On considère aussi les ordres induits sur les m -chemins de Dyck (ceux où toutes les montées sont de hauteur multiple de m), et sur les m -chemins de Dyck miroir (les descentes sont de hauteur multiple de m).

L'énumération des intervalles révèle des liens avec le dénombrement des marches dans un quadrant. Leur série génératrice est algébrique pour $m = 1$, mais non D-finie pour $m > 1$, que ce soit pour les m -chemins de Dyck ou leur miroir. Les pas autorisés dans ces marches, contrairement à nos habitudes, sont en nombre infini (mais il y a seulement un nombre fini de pas dans \mathbb{N}^2). Cependant, l'étude des équations fonctionnelles qui les dénombre s'inspire directement de ce qui a été fait dans le cadre d'un nombre fini de pas, ce qui prouve une nouvelle fois, s'il en était besoin, l'intérêt de ce cadre.

Travail en commun avec Jean-Luc Baril, Sergey Kirgizov (LIB, Université de Bourgogne) et Mehdi Naima (LIP6, Sorbonne Université)

Lucia Di Vizio

Strong differential transcendence, difference equations and combinatorics

I'll talk about the notion of the so-called « strongly differential transcendence », namely the differential transcendence over the field of germs of meromorphic functions at zero. Klazar in 2003 proved that the generating series of Bell's numbers is strongly differentially transcendental. I'll show that series that are solutions of difference equations as the one considered by Klazar, are in general strongly differentially transcendent and that enumerative combinatorics provides many examples of this phenomenon.

This is a joint work with Alin Bostan and Kilian Raschel.

Andrew Elvey Price

Enumeration of walks by winding angle

In the little yellow book, Fayolle, Iasnogorodski and Malyshev developed the elliptic method for analysing random walks with small steps in the quarter plane. I will describe how this method can be extended to analyse random walks with small steps according to their winding angle around the origin. At the large scale this question has been well understood since the 80's thanks to work by Spitzer, Belisle, Rudnick, Hu and many others. The first exact results for this problem were given by Budd in 2017, who solved it on the square lattice.

Guy Fayolle

La genèse du Livre Jaune

Jules Flin

Méthode des invariants de Tutte et particules browniennes en interaction

Dans les années 1970s, Tutte a développé une méthode basée sur une notion d'invariant, pour résoudre des équations fonctionnelles intervenant dans des problèmes de dénombrement (triangulations). Par la suite, ces invariants sont intervenus dans l'énumération des marches dans le quart de plan. Enfin, ce procédé a été récemment appliqué avec succès à l'étude de processus stochastiques continus. Dans cet exposé, j'illustrerai la méthode en déterminant la mesure invariante du processus décrivant les écarts dans un système dégénéré de trois particules browniennes en interaction.

Travail en collaboration avec Thomas Dreyfus et Sandro Franceschi.

Christine Fricker

Analysis of an incentive policy in large car-sharing systems

We focus on urban systems where cars, available to users, are parked in public space within a service area. This service zone can be divided, to a first approximation, into a high-demand zone and a low-demand zone. Communauto Montreal has an incentive policy to move cars parked for too long in the low-demand zone. A user who takes such a car and returns it to the high-demand zone receives a reward. We present a stochastic model to analyse this policy. The mean-field limit is obtained when the service area is partitioned into a large number of virtual stations. Simulations give an overview of the influence of the parameters. The model proves difficult to analyse and alternatives are proposed.

This is a joint work with Bianca Marin Moreno, Hanene Mohamed, Martin Trépanier and Amaury Philippe.

Cyril Furtlehner

Online feature learning in terms of spectral flow processes

Regression models aim to recover a noisy signal in the form of a combination of regressors, also called features in machine learning. In the context of neural networks, these evolve according to a learning process following a gradient descent of a loss function defined by the parameters of the features and training examples. The alignment of the population covariance feature matrix with the signal is known to play a key role in the generalization properties of the model, i.e. its ability to make predictions on unseen data during training. We present a statistical physics picture of this learning process in a simplified setting. Considering the online learning setting, we derive an autonomous dynamical system in terms of elementary degrees of freedom of the problem namely the eigenvalue of the population matrix and the spectral power of the signal on each of these modes. This allows us in particular to determine (i) the rate of information gain by the model about the signal (ii) the evolution of the relative alignment between the population matrix and the signal in terms of the flow of its power spectrum. Additionally we see how the mean flow and its variance scale with the number of parameters in absence of inductive bias of the model

Charlotte Hardouin

Approche galoisienne des marches à pas arbitrairement grands

Dans *Random walk in the quarter plane*, Fayolle, Iasnogorodski et Malyshev développent une approche galoisienne pour étudier les marches aléatoires à petits pas confinées dans le quart de plan. Pour un groupe de Galois fini, ils montrent comment le comportement algébrique et différentiel de la fonction génératrice de la probabilité stationnaire est classifié en terme d'invariants galoisiens classiques tels que la norme et la trace. Cette approche a été adaptée avec succès à l'étude combinatoire des marches dans le quart plan par Kurkova et Raschel et Bernardi-Bousquet-Mélou et Raschel. L'étude des marches à grands pas, ou pas arbitrairement grands, a été initiée par Bostan, Bousquet Mérou et Melczer qui généralisent des outils et méthodes combinatoires et obtiennent de nombreux résultats de classification.

Dans un travail en collaboration avec P. Bonnet, nous montrons comment le formalisme combinatoire de Bostan, Bousquet Mérou et Melczer pour les marches à grands pas peut être muni d'une structure galoisienne. Celle-ci étend celle introduite dans le petit livre jaune au cas des grands pas. Nous en déduisons des preuves d'algébricité pour les séries génératrices comptant des marches à pas arbitrairement grands.

Philippe Jacquet

Modelisation de la mobilite intra-urbaine a l'aide de mesures hyperfractales dans le plan.

Nous decrivons le modele hyperfractal pour l'appliquer a la distribution des trafics dans le reseau urbain. Une mesure hyperfractale prend en compte le fait que les rues a forte densite' alternent avec des rues a forte densite' jusqu'a des echelles tres fines, selon un modele fractal. La particularite' est qu'elle exhibe une dimension fractale d_F superieure a la dimension euclidienne. Cela est possible parce qu'une mesure fractale est plus qu'un objet fractal. Cela entraine des resultats remarquable, par exemple un reseau de communication sans fil dans une ville hyperfractale a une capacite' de transport en $n^{1-1/(d_F+1)}$, superieure a la capacite' en $n^{1/2}$ que l'on connait dans un reseau uniforme, grace a Gupta et Kumar. On peut appliquer aussi le modele au probleme du parking et trouver un parcours avant parking en λ^{-1/d_F} ou λ est l'intensite moyenne des places qui se liberent.

Arnaud de La Fortelle

Un chemin pavé de probabilités, algorithmes et données : la théorie appliquée aux transports

Le quart de plan est un terrain de jeu fascinant pour appliquer les théories et les concepts qui m'ont animé durant ma thèse sous la supervision de Guy Fayolle : la frontière de Martin, les fonctions harmoniques, l'information, l'entropie et certaines approximations issues des grandes déviations.

Ces outils mathématiques ne sont pas seulement fascinants en eux-mêmes : ils permettent aussi de modéliser des phénomènes complexes dans des systèmes réels. Les propriétés de ces grands systèmes stochastiques – parfois même infinis – sont très inspirantes pour l'étude de problématiques concrètes comme les réseaux de transport, le contrôle des systèmes robotiques, la coopération ou encore la collecte de données pertinentes.

La plupart des modèles sous-jacents reposent sur la notion de transition ou d'événement, et en exploitant ces structures, on peut concevoir des algorithmes efficaces pour l'optimisation des flux dans les réseaux ou la coordination multi-agent en robotique, et notamment passer aux échelles immenses de la donnée actuelle et future.

Finalement, même si l'on quitte le quart de plan, on ne s'en éloigne pas infiniment !

Jean-Marc Lasgouttes

Stop-and-go Waves in Car-Following-Models

Waves, known as stop-and-go waves or phantom jams, can appear spontaneously in dense traffic. This causes a situation where drivers are faced with consecutive phases of acceleration and braking. Although waves are well understood in the setting of macroscopic models, few results exist for the car-following model. This paper gives an asymptotic approximation of the speed and shape of these waves. It relies on the well-known saddle-point method in order to describe the trajectory of a vehicle caught in such a wave.

This is a recent work in Collaboration with Guy Fayolle, definitely not related to walks in the quarter plan, but which demonstrates another facet of his skills.

Maxence Petit

Frontière de Martin d'un mouvement Brownien réfléchi dégénéré dans un quadrant

On considère un mouvement Brownien dégénéré et drifté vers l'extérieur dans le quart de plan avec des réflexions obliques sur les frontières. Dans cette présentation, nous irons à la recherche des fonctions harmoniques positives associées à ce processus transient. Pour cela, nous utiliserons la méthode par compensation, qui permet de résoudre explicitement (en termes de somme infinie d'exponentielles) l'EDP (linéaire) avec conditions au bord qui caractérise les fonctions harmoniques. Nous en déduisons la frontière de Martin du processus, en discutant de l'asymptotique des fonctions de Green.

Ellen Saada

The two-lane exclusion process

We consider the simple exclusion process on $\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$, that is, a « horizontal ladder » composed of 2 lanes, depending on 6 parameters. Particles can jump according to a lane-dependent translation-invariant nearest neighbour jump kernel, i.e. « horizontally » along each lane, and « vertically » along the scales of the ladder. We investigate the extremal invariant measures, then the hydrodynamic behavior and local equilibrium of this model. We highlight new phenomena arising beyond the one-dimensional exclusion dynamics.

Joint works with Gidi Amir, Christophe Bahadoran, Ofer Busani.

Pierre Tarrago

Fonctions harmoniques pour marches singulières dans le quart de plan

Les fonctions harmoniques positives sont des objets fondamentaux pour le conditionnement d'une marche aléatoire à rester dans un domaine. Dans le cas de marches aléatoires dans le quart de plan, il est dans certains cas possible d'obtenir des expressions relativement explicites pour l'ensemble de ces fonctions harmoniques. Dans cet exposé, nous étudierons un ensemble de marches pour lequel c'est le cas : celui des marches aléatoires singulières avec des petits pas négatifs. Nous montrerons notamment que la méthode de compensation, méthode créée dans les années 90, permet d'exprimer l'ensemble des fonctions harmoniques positives comme de simples séries alternées.

Cet exposé s'appuie sur un travail en commun avec Viet Hung Hoang et Kilian Raschel.

Paul Thévenin

Séries de Catalan et systèmes méandriques

Je considérerai une famille de sommes infinies de produits de nombres de Catalan, indexées par des arbres. Je montrerai en particulier que ces sommes peuvent être calculées explicitement, et qu'elles sont des polynômes en $1/\pi$ à coefficients rationnels. Le calcul de ces sommes est motivé par l'étude de grands systèmes méandriques, qui sont des configurations non croisées de boucles dans le plan.

Travail en collaboration avec A. Bostan et V. Féray

Planning de la conférence

Horaire	Mardi 15 avril	Mercredi 16 avril	Jeudi 17 avril
09h20	Mot des organisateurs		
09h30	Guy Fayolle	Charlotte Hardouin	Andrew Elvey Price
10h00	Mireille Bousquet-Mélou	Pierre Tarrago	Maxence Petit
10h30	Café	Café	Café
11h00	Lucia Di Vizio	Pierre Bonnet	Planétarium -
11h30	Alin Bostan	Christine Fricker	Observatoire
12h00	Repas	Repas	Repas
14h00	Temps libre	Tournois Échec	Cyril Furtlehner
14h30			Ellen Saada
15h00			Café
15h30	Café	Café	Fin
16h00	Jean-Marc Lasgouttes	Jules Flin	
16h30	Arnaud de La Fortelle	Paul Thévenin	
17h00	Philippe Jacquet	Théo Ballu	
19h30	Dîner - Fioupelan 62 Quai du Port	Dîner - Moga 10 bis Rue Bernex	

