Approche galoisienne des marches à pas arbitrairement grands

Charlotte Hardouin (IMT-Toulouse)

avec Pierre Bonnet (Labri-Bordeaux)

Un quart de siècle pour un quart de plan, IMERA, du 15 au 17 avril 2025

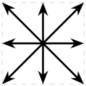
Cadre combinatoire

Marche: chemin dans $\mathbb{Z}^2$ partant de $(0,0)$ avec pour direction $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$, fini , **qui reste dans le premier quadrant**.

Cadre combinatoire

Marche: chemin dans $\mathbb{Z}^2$ partant de $(0,0)$ avec pour direction $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$, fini , **qui reste dans le premier quadrant**.

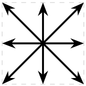
Marche à petits pas si $\mathcal{D} \subset \{-1,0,1\}^2$



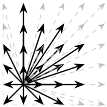
Cadre combinatoire

Marche: chemin dans $\mathbb{Z}^2$ partant de $(0,0)$ avec pour direction $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$, fini , **qui reste dans le premier quadrant**.

Marche à petits pas si $\mathcal{D} \subset \{-1, 0, 1\}^2$



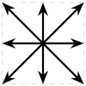
et à pas arbitrairement grands .



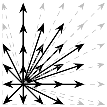
Cadre combinatoire

Marche: chemin dans $\mathbb{Z}^2$ partant de $(0,0)$ avec pour direction $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$, fini , **qui reste dans le premier quadrant**.

Marche à petits pas si $\mathcal{D} \subset \{-1,0,1\}^2$



et à pas arbitrairement grands .

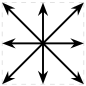


On se restreint aux petits pas arrière $\mathcal{D} \subset \{-1,0,..\}^2$.

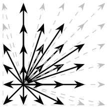
Cadre combinatoire

Marche: chemin dans $\mathbb{Z}^2$ partant de $(0,0)$ avec pour direction $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$, fini , **qui reste dans le premier quadrant**.

Marche à petits pas si $\mathcal{D} \subset \{-1,0,1\}^2$



et à pas arbitrairement grands .

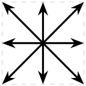


On se restreint aux petits pas arrière $\mathcal{D} \subset \{-1,0,..\}^2$.

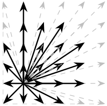
Cadre combinatoire

Marche: chemin dans $\mathbb{Z}^2$ partant de $(0,0)$ avec pour direction $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$, fini , **qui reste dans le premier quadrant**.

Marche à petits pas si $\mathcal{D} \subset \{-1,0,1\}^2$



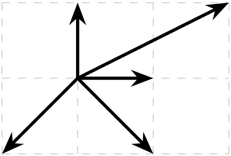
et à pas arbitrairement grands .



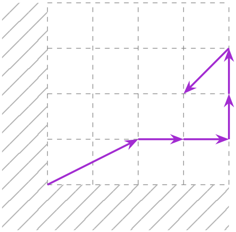
On se restreint aux petits pas arrière $\mathcal{D} \subset \{-1,0,..\}^2$.

Marches et séries génératrice

Un exemple de Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer



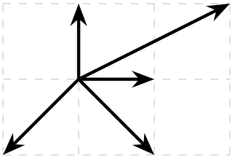
Le modèle $\mathcal{G}_3$



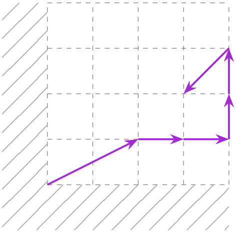
Marche de longueur 6 terminant en $(3, 2)$

Suite énumérative: Fixons $\mathcal{D}$.
$q(i, j, k)$: le nombre de marches de direction $\mathcal{D}$ terminant en (i, j) de longueur k dans le premier quadrant.

Un exemple de Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer



Le modèle $\mathcal{G}_3$



Marche de longueur 6 terminant en $(3, 2)$

Suite énumérative: Fixons $\mathcal{D}$.
$q(i, j, k)$: le nombre de marches de direction $\mathcal{D}$ terminant en (i, j) de longueur k dans le premier quadrant.

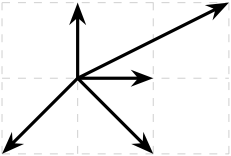
Série génératrice:

$$Q(X, Y, t) = \sum_{i,j,k} q(i, j, k) X^i Y^j t^k$$

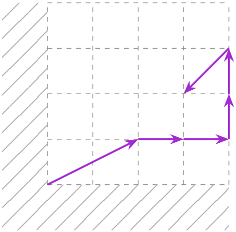
converge pour $|X|, |Y| \leq 1$ et $|t| < \frac{1}{|\mathcal{D}|}$.

Marches et séries génératrice

Un exemple de Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer



Le modèle $\mathcal{G}_3$



Marche de longueur 6 terminant en $(3, 2)$

Suite énumérative: Fixons $\mathcal{D}$.
$q(i,j,k)$: le nombre de marches de direction $\mathcal{D}$ terminant en (i,j) de longueur k dans le premier quadrant.

Série génératrice:

$$Q(X,Y,t) = \sum_{i,j,k} q(i,j,k) X^i Y^j t^k$$

converge pour $|X|, |Y| \leq 1$ et $|t| < \frac{1}{|\mathcal{D}|}$.

Classification

Fixons $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$.

Classification

Fixons $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$.

Question combinatoire:

Forme explicite de $q(i, j, k)$?

Classification

Fixons $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$.

Question combinatoire:

Forme explicite de $q(i, j, k)$?

Trop difficile en général

Classification

Fixons $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$.

Question combinatoire:

Forme explicite de $q(i, j, k)$?

Trop difficile en général

Classification algébrique: Est-ce que $Q(X, Y, t)$

Classification

Fixons $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$.

Question combinatoire:

Forme explicite de $q(i, j, k)$?

Trop difficile en général

Classification algébrique: Est-ce que $Q(X, Y, t)$

- est algébrique sur $\mathbb{Q}(X, Y, t)$?

Classification

Fixons $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$.

Question combinatoire:

Forme explicite de $q(i, j, k)$?

Trop difficile en général

Classification algébrique: Est-ce que $Q(X, Y, t)$

- est algébrique sur $\mathbb{Q}(X, Y, t)$?

$$P(Q(X, Y, t), X, Y, t) = 0$$

Classification

Fixons $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$.

Question combinatoire:

Forme explicite de $q(i, j, k)$?

Trop difficile en général

Classification algébrique: Est-ce que $Q(X, Y, t)$

- est algébrique sur $\mathbb{Q}(X, Y, t)$?

$$P(Q(X, Y, t), X, Y, t) = 0$$

- est X, Y, t-D-finie sur $\mathbb{Q}(X, Y, t)$?

Classification

Fixons $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$.

Question combinatoire:

Forme explicite de $q(i,j,k)$?

Trop difficile en général

Classification algébrique: Est-ce que $Q(X,Y,t)$

- est algébrique sur $\mathbb{Q}(X,Y,t)$?

$$P(Q(X,Y,t),X,Y,t) = 0$$

- est X, Y, t-D-finie sur $\mathbb{Q}(X,Y,t)$?

$$a_n \partial_X^n Q(X,Y,t) + \cdots + a_0 Q(X,Y,t) = 0.$$

Une équation fonctionnelle

$\mathcal{D} \subset \{-1, 0, ..\}^2$.

Une équation fonctionnelle

$\mathcal{D} \subset \{-1, 0, ..\}^2$.

Polynôme (de Laurent) des pas : $S(X, Y) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j \in \frac{1}{XY}\mathbb{Q}[X, Y]$

Une équation fonctionnelle

$\mathcal{D} \subset \{-1, 0, ..\}^2$.

Polynôme (de Laurent) des pas : $S(X, Y) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j \in \frac{1}{XY}\mathbb{Q}[X, Y]$

Polynôme du noyau: $K(X, Y) = XY(1 - tS(X, Y))$

Une équation fonctionnelle

$\mathcal{D} \subset \{-1, 0, ..\}^2$.

Polynôme (de Laurent) des pas : $S(X, Y) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j \in \frac{1}{XY}\mathbb{Q}[X, Y]$

Polynôme du noyau: $K(X, Y) = XY(1 - tS(X, Y))$

Equation fonctionnelle: Par récurrence sur la longueur des pas

$$K(X, Y)Q(X, Y, t) = XY + K(X, 0, t)Q(X, 0, t) + K(0, Y, t)Q(0, Y, t) \\ - K(0, 0, t)Q(0, 0, t).$$

Une équation fonctionnelle

$\mathcal{D} \subset \{-1, 0, ..\}^2$.

Polynôme (de Laurent) des pas : $S(X, Y) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j \in \frac{1}{XY}\mathbb{Q}[X, Y]$

Polynôme du noyau: $K(X, Y) = XY(1 - tS(X, Y))$

Equation fonctionnelle: Par récurrence sur la longueur des pas

$$K(X, Y)Q(X, Y, t) \quad = \quad XY \quad - \quad A(X) \quad + \quad B(Y).$$

Une équation fonctionnelle

$\mathcal{D} \subset \{-1, 0, ..\}^2$.

Polynôme (de Laurent) des pas : $S(X, Y) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j \in \frac{1}{XY}\mathbb{Q}[X, Y]$

Polynôme du noyau: $K(X, Y) = XY(1 - tS(X, Y))$

Equation fonctionnelle: Par récurrence sur la longueur des pas

$$K(X, Y)Q(X, Y, t) \quad = \quad XY \quad - \quad A(X) \quad + \quad B(Y).$$

Fayolle-Iasnogorodski-Malyshev Pour K de degré $(2, 2)$, on évalue sur $K(X, Y) = 0$ et obtiennent une équation de la forme

$$\sigma(A(s)) = A(s) + b(s).$$

Une courbe et son corps de fonctions

Fixons t in $[0;1]$ transcendant sur $\mathbb{Q}$.

Une courbe et son corps de fonctions

Fixons t in $[0;1]$ transcendant sur $\mathbb{Q}$.

On suppose $K(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ irréductible de degré d_x en X et d_y en Y

Une courbe et son corps de fonctions

Fixons t in $[0;1]$ transcendant sur $\mathbb{Q}$.

On suppose $K(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ irréductible de degré d_x en X et d_y en Y

Courbe du noyau

$$E = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | K(x,y) = 0\}} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

Une courbe et son corps de fonctions

Fixons t in $[0;1]$ transcendant sur $\mathbb{Q}$.

On suppose $K(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ irréductible de degré d_x en X et d_y en Y

Courbe du noyau

$$E = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | K(x,y) = 0\}} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{P}^1_x & & \mathbb{P}^1_y \end{tikzcd}$$

Une courbe et son corps de fonctions

Fixons t in $[0;1]$ transcendant sur $\mathbb{Q}$.

On suppose $K(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ irréductible de degré d_x en X et d_y en Y

Courbe du noyau

$$E = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | K(x,y) = 0\}} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{P}^1_x & & \mathbb{P}^1_y \end{tikzcd}$$

Corps des fonctions $\mathbb{C}(E) = \mathit{Frac}\,(\mathbb{C}[X,Y]/(K(X,Y))) = \mathbb{C}(x,y)$ avec $K(x,y) = 0$

Une courbe et son corps de fonctions

Fixons t in $[0;1]$ transcendant sur $\mathbb{Q}$.

On suppose $K(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ irréductible de degré d_x en X et d_y en Y

Courbe du noyau

$$E = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | K(x,y) = 0\}} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{P}^1_x & & \mathbb{P}^1_y
\end{tikzcd}$$

Corps des fonctions $\mathbb{C}(E) = Frac\,(\mathbb{C}[X,Y]/(K(X,Y))) = \mathbb{C}(x,y)$ avec $K(x,y) = 0$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C}(E) \arrow[dl, dash, "d_y"'] \arrow[dr, dash, "d_x"] & \\
\mathbb{C}(x) & & \mathbb{C}(y)
\end{tikzcd}$$

Une courbe et son corps de fonctions

Fixons t in $[0;1]$ transcendant sur $\mathbb{Q}$.

On suppose $K(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ irréductible de degré d_x en X et d_y en Y

Courbe du noyau

$$E = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | K(x,y) = 0\}} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{P}^1_x & & \mathbb{P}^1_y \end{tikzcd}$$

Corps des fonctions $\mathbb{C}(E) = Frac\left(\mathbb{C}[X,Y]/(K(X,Y))\right) = \mathbb{C}(x,y)$ avec $K(x,y) = 0$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}(E) \arrow[dl, dash, "d_y"'] \arrow[dr, dash, "d_x"] & \\ \mathbb{C}(x) & & \mathbb{C}(y) \end{tikzcd}$$

Classification-marches à petits pas (I)

Petits pas $\mathcal{D} \subset \{-1, 0, 1\}^2$ $K(X, Y)$ de degré 2 en X et Y.

Classification-marches à petits pas (I)

Petits pas $\mathcal{D} \subset \{-1, 0, 1\}^2$ $K(X, Y)$ de degré 2 en X et Y.

E est de genre 0 ou 1

Classification-marches à petits pas (I)

Petits pas $\mathcal{D} \subset \{-1, 0, 1\}^2$ $K(X, Y)$ de degré 2 en X et Y.

E est de genre 0 ou 1

Revêtements et extensions galoisiennes

Classification-marches à petits pas (I)

Petits pas $\mathcal{D} \subset \{-1, 0, 1\}^2$ $K(X, Y)$ de degré 2 en X et Y.

E est de genre 0 ou 1

Revêtements et extensions galoisiennes

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{P}^1_x & & \mathbb{P}^1_y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C}(E) \arrow[dl, dash, "2"'] \arrow[dr, dash, "2"] & \\
\mathbb{C}(x) & & \mathbb{C}(y)
\end{tikzcd}$$

Classification-marches à petits pas (I)

Petits pas $\mathcal{D} \subset \{-1,0,1\}^2$ $K(X,Y)$ de degré 2 en X et Y.

E est de genre 0 ou 1

Revêtements et extensions galoisiennes

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{P}^1_x & & \mathbb{P}^1_y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{C}(E) \arrow[dl, dash, "2"'] \arrow[dr, dash, "2"] & \\ \mathbb{C}(x) & & \mathbb{C}(y) \end{tikzcd}$$

Groupe de la marche

$$G = \langle \mathrm{Aut}(E|\mathbb{P}^1_x), \mathrm{Aut}(E|\mathbb{P}^1_y) \rangle \subset \mathrm{Aut}(E))$$

Classification-marches à petits pas (I)

Petits pas $\mathcal{D} \subset \{-1, 0, 1\}^2$ $K(X, Y)$ de degré 2 en X et Y.

E est de genre 0 ou 1

Revêtements et extensions galoisiennes

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{P}^1_x & & \mathbb{P}^1_y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{C}(E) \arrow[dl, dash, "2"'] \arrow[dr, dash, "2"] & \\ \mathbb{C}(x) & & \mathbb{C}(y) \end{tikzcd}$$

Groupe de la marche

$$G = \langle \mathrm{Aut}(E|\mathbb{P}^1_x), \mathrm{Aut}(E|\mathbb{P}^1_y) \rangle \subset \mathrm{Aut}(E))$$

$$G = \langle \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(E)|\mathbb{C}(x)), \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(E)|\mathbb{C}(y)) \rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}(E)).$$

Automorphisme de la marche $\sigma = \iota^y \iota^x$

Classification petits pas (II)

Results: Mishna-Rechnitzer (07), Bousquet-Mélou-Mishna (10), Bostan-Kauers (10), Kurkova-Raschel (12), Mishna-Melczer (14), Bernardi-Bousquet-Mélou-Raschel (17)

Classification petits pas (II)

Results: Mishna-Rechnitzer (07), Bousquet-Mélou-Mishna (10), Bostan-Kauers (10), Kurkova-Raschel (12), Mishna-Melczer (14), Bernardi-Bousquet-Mélou-Raschel (17)

$Q(X, Y)$ est D-finie ssi

Classification petits pas (II)

Results: Mishna-Rechnitzer (07), Bousquet-Mélou-Mishna (10), Bostan-Kauers (10), Kurkova-Raschel (12), Mishna-Melczer (14), Bernardi-Bousquet-Mélou-Raschel (17)

$Q(X, Y)$ est D-finie ssi le groupe de la marche G est un groupe fini

Classification petits pas (II)

Results: Mishna-Rechnitzer (07), Bousquet-Mélou-Mishna (10), Bostan-Kauers (10), Kurkova-Raschel (12), Mishna-Melczer (14), Bernardi-Bousquet-Mélou-Raschel (17)

$Q(X, Y)$ est D-finie ssi le groupe de la marche G est un groupe fini

ssi il y a des invariants non-constants

Classification petits pas (II)

Results: Mishna-Rechnitzer (07), Bousquet-Mélou-Mishna (10), Bostan-Kauers (10), Kurkova-Raschel (12), Mishna-Melczer (14), Bernardi-Bousquet-Mélou-Raschel (17)

$Q(X, Y)$ est D-finie ssi le groupe de la marche G est un groupe fini

ssi il y a des invariants non-constants

$F(X) \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}$ et $G(Y) \in \mathbb{C}(Y) \setminus \mathbb{C}$ tels que

$$F(X) - G(Y) = K(X, Y)H(X, Y),$$

Classification petits pas (II)

Results: Mishna-Rechnitzer (07), Bousquet-Mélou-Mishna (10), Bostan-Kauers (10), Kurkova-Raschel (12), Mishna-Melczer (14), Bernardi-Bousquet-Mélou-Raschel (17)

$Q(X,Y)$ est D-finie ssi le groupe de la marche G est un groupe fini

ssi il y a des invariants non-constants

$F(X) \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}$ et $G(Y) \in \mathbb{C}(Y) \setminus \mathbb{C}$ tels que

$$F(X) - G(Y) = K(X,Y)H(X,Y),$$

avec $K(X,Y)$ ne divise pas le dénominateur de $H(X,Y) \in \mathbb{C}(X,Y)$.

Classification petits pas (II)

Results: Mishna-Rechnitzer (07), Bousquet-Mélou-Mishna (10), Bostan-Kauers (10), Kurkova-Raschel (12), Mishna-Melczer (14), Bernardi-Bousquet-Mélou-Raschel (17)

$Q(X,Y)$ est D-finie ssi le groupe de la marche G est un groupe fini

ssi il y a des invariants non-constants

$F(X) \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}$ et $G(Y) \in \mathbb{C}(Y) \setminus \mathbb{C}$ tels que

$$F(X) - G(Y) = K(X,Y)H(X,Y),$$

avec $K(X,Y)$ ne divise pas le dénominateur de $H(X,Y) \in \mathbb{C}(X,Y)$.

ssi il y a des nouvelles σ-constantes dans $\mathbb{C}(E)$:

Classification petits pas (II)

Results: Mishna-Rechnitzer (07), Bousquet-Mélou-Mishna (10), Bostan-Kauers (10), Kurkova-Raschel (12), Mishna-Melczer (14), Bernardi-Bousquet-Mélou-Raschel (17)

$Q(X,Y)$ est D-finie ssi le groupe de la marche G est un groupe fini

ssi il y a des invariants non-constants

$F(X) \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}$ et $G(Y) \in \mathbb{C}(Y) \setminus \mathbb{C}$ tels que

$$F(X) - G(Y) = K(X,Y)H(X,Y),$$

avec $K(X,Y)$ ne divise pas le dénominateur de $H(X,Y) \in \mathbb{C}(X,Y)$.

ssi il y a des nouvelles σ-constantes dans $\mathbb{C}(E)$:

Il existe $f \in \mathbb{C}(E) = \mathbb{C}(x,y)$ non-constante telle que

$$\sigma(f) = f.$$

Classification petits pas (II)

Results: Mishna-Rechnitzer (07), Bousquet-Mélou-Mishna (10), Bostan-Kauers (10), Kurkova-Raschel (12), Mishna-Melczer (14), Bernardi-Bousquet-Mélou-Raschel (17)

$Q(X, Y)$ est D-finie ssi le groupe de la marche G est un groupe fini

ssi il y a des invariants non-constants

$F(X) \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}$ et $G(Y) \in \mathbb{C}(Y) \setminus \mathbb{C}$ tels que

$$F(X) - G(Y) = K(X, Y)H(X, Y),$$

avec $K(X, Y)$ ne divise pas le dénominateur de $H(X, Y) \in \mathbb{C}(X, Y)$.

ssi il y a des nouvelles σ-constantes dans $\mathbb{C}(E)$:

Il existe $f \in \mathbb{C}(E) = \mathbb{C}(x, y)$ non-constante telle que

$$\sigma(f) = f.$$

$Q(X, Y)$ est algébrique ssi

$Q(X, Y)$ est algébrique ssi G est fini et XY découple

$Q(X, Y)$ est algébrique ssi G est fini et XY découple

XY découple : $f(X) \in \mathbb{C}(X)$ et $g(Y) \in \mathbb{C}(Y)$ telles que

$$XY = f(X) - g(Y) + K(X, Y)H'(X, Y).$$

$Q(X,Y)$ est algébrique ssi G est fini et XY découple

XY découple : $f(X) \in \mathbb{C}(X)$ et $g(Y) \in \mathbb{C}(Y)$ telles que

$$XY = f(X) - g(Y) + K(X,Y)H'(X,Y).$$

Trace nulle dans $\mathbb{C}(E) = \mathbb{C}(x,y)$ $\sigma^n = id$ et

$$\alpha(xy) = 0 \text{ pour } \alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^k(\iota^x - id) \in \mathbb{C}[G].$$

Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21): Notion d'orbite de $\mathcal{D}$, classification des types d'orbites finies pour $\mathcal{D} \subset \{-1, 0, 1, 2\}^2$ et caractérisation de modèles D-finis ou pas.

Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21): Notion d'orbite de $\mathcal{D}$, classification des types d'orbites finies pour $\mathcal{D} \subset \{-1, 0, 1, 2\}^2$ et caractérisation de modèles D-finis ou pas.

Bonnet-Hardouin (23):

Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21): Notion d'orbite de $\mathcal{D}$, classification des types d'orbites finies pour $\mathcal{D} \subset \{-1, 0, 1, 2\}^2$ et caractérisation de modèles D-finis ou pas.

Bonnet-Hardouin (23):

Notion de groupe de la marche

Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21): Notion d'orbite de $\mathcal{D}$, classification des types d'orbites finies pour $\mathcal{D} \subset \{-1, 0, 1, 2\}^2$ et caractérisation de modèles D-finis ou pas.

Bonnet-Hardouin (23):

Notion de groupe de la marche

Pour des orbites finies, procédure pour construire des invariants et découplages

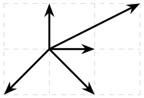
Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21): Notion d'orbite de $\mathcal{D}$, classification des types d'orbites finies pour $\mathcal{D} \subset \{-1, 0, 1, 2\}^2$ et caractérisation de modèles D-finis ou pas.

Bonnet-Hardouin (23):

Notion de groupe de la marche

Pour des orbites finies, procédure pour construire des invariants et découplages

Preuves d'algébricité de modèles dont $\mathcal{G}_3$



L'orbite (Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21))

Polynôme du noyau: $K(X,Y) = XY(1 - t\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j)$

L'orbite (Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21))

Polynôme du noyau: $K(X,Y) = XY(1 - t\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j)$

$\mathbb{K}$ clôture algébrique de $\mathbb{C}(E) = \mathit{Frac}\,(\mathbb{C}[X,Y]/(K(X,Y))) = \mathbb{C}(x,y)$.

L'orbite (Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21))

Polynôme du noyau: $K(X,Y) = XY(1 - t\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j)$

$\mathbb{K}$ clôture algébrique de $\mathbb{C}(E) = \mathit{Frac}\,(\mathbb{C}[X,Y]/(K(X,Y))) = \mathbb{C}(x,y)$.

On a $K(x,y) = 0$

L'orbite (Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21))

Polynôme du noyau: $K(X,Y) = XY(1 - t\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j)$

$\mathbb{K}$ clôture algébrique de $\mathbb{C}(E) = Frac\,(\mathbb{C}[X,Y]/(K(X,Y))) = \mathbb{C}(x,y)$.

On a $K(x,y) = 0$

On définit deux relations d'équivalences sur les paires (u,v) et (u',v') dans $\mathbb{K}^2$ telles $K(u,v) = K(u',v') = 0$

L'orbite (Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21))

Polynôme du noyau: $K(X,Y) = XY(1 - t\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j)$

$\mathbb{K}$ clôture algébrique de $\mathbb{C}(E) = Frac\,(\mathbb{C}[X,Y]/(K(X,Y))) = \mathbb{C}(x,y)$.

On a $K(x,y) = 0$

On définit deux relations d'équivalences sur les paires (u,v) et (u',v') dans $\mathbb{K}^2$ telles $K(u,v) = K(u',v') = 0$

- $(u,v) \sim^x (u',v')$ si $u = u'$

L'orbite (Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21))

Polynôme du noyau: $K(X,Y) = XY(1 - t\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j)$

$\mathbb{K}$ clôture algébrique de $\mathbb{C}(E) = \mathit{Frac}\,(\mathbb{C}[X,Y]/(K(X,Y))) = \mathbb{C}(x,y)$.

On a $K(x,y) = 0$

On définit deux relations d'équivalences sur les paires (u,v) et (u',v') dans $\mathbb{K}^2$ telles $K(u,v) = K(u',v') = 0$

- $(u,v) \sim^x (u',v')$ si $u = u'$
- $(u,v) \sim^y (u',v')$ si $v = v'$

L'orbite (Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21))

Polynôme du noyau: $K(X,Y) = XY(1 - t\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j)$

$\mathbb{K}$ clôture algébrique de $\mathbb{C}(E) = \mathit{Frac}\,(\mathbb{C}[X,Y]/(K(X,Y))) = \mathbb{C}(x,y)$.

On a $K(x,y) = 0$

On définit deux relations d'équivalences sur les paires (u,v) et (u',v') dans $\mathbb{K}^2$ telles $K(u,v) = K(u',v') = 0$

- $(u,v) \sim^x (u',v')$ si $u = u'$
- $(u,v) \sim^y (u',v')$ si $v = v'$
- $\sim = \sim^x \cup \sim^y$.

L'orbite (Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21))

Polynôme du noyau: $K(X, Y) = XY(1 - t\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j)$

$\mathbb{K}$ clôture algébrique de $\mathbb{C}(E) = \mathit{Frac}\,(\mathbb{C}[X, Y]/(K(X, Y))) = \mathbb{C}(x, y)$.

On a $K(x, y) = 0$

On définit deux relations d'équivalences sur les paires (u, v) et (u', v') dans $\mathbb{K}^2$ telles $K(u, v) = K(u', v') = 0$

- $(u, v) \sim^x (u', v')$ si $u = u'$
- $(u, v) \sim^y (u', v')$ si $v = v'$
- $\sim = \sim^x \cup \sim^y$.

L'orbite (Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21))

Polynôme du noyau: $K(X,Y) = XY(1 - t\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j)$

$\mathbb{K}$ clôture algébrique de $\mathbb{C}(E) = Frac\,(\mathbb{C}[X,Y]/(K(X,Y))) = \mathbb{C}(x,y)$.

On a $K(x,y) = 0$

On définit deux relations d'équivalences sur les paires (u,v) et (u',v') dans $\mathbb{K}^2$ telles $K(u,v) = K(u',v') = 0$

- $(u,v) \sim^x (u',v')$ si $u = u'$
- $(u,v) \sim^y (u',v')$ si $v = v'$
- $\sim = \sim^x \cup \sim^y$.

L'orbite $\mathcal{O}$ de la marche est la classe de (x,y) par rapport à $\sim$.

L'orbite (Bostan-Bousquet-Mélou-Melczer (21))

Polynôme du noyau: $K(X,Y) = XY(1 - t\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} X^i Y^j)$

$\mathbb{K}$ clôture algébrique de $\mathbb{C}(E) = Frac\,(\mathbb{C}[X,Y]/(K(X,Y))) = \mathbb{C}(x,y)$.

On a $K(x,y) = 0$

On définit deux relations d'équivalences sur les paires (u,v) et (u',v') dans $\mathbb{K}^2$ telles $K(u,v) = K(u',v') = 0$

- $(u,v) \sim^x (u',v')$ si $u = u'$
- $(u,v) \sim^y (u',v')$ si $v = v'$
- $\sim = \sim^x \cup \sim^y$.

L'orbite $\mathcal{O}$ de la marche est la classe de (x,y) par rapport à $\sim$.

Calcul de l'orbite grâce à des résultants.

Pour $\mathcal{G}_3$, on a

$$K(X,Y) = XY - t(1 + XY^2 + X^2 + X^3Y^2 + X^2Y).$$

L'orbite de (x, y) est

Pour $\mathcal{G}_3$, on a

$$K(X,Y) = XY - t(1 + XY^2 + X^2 + X^3Y^2 + X^2Y).$$

L'orbite de (x,y) est

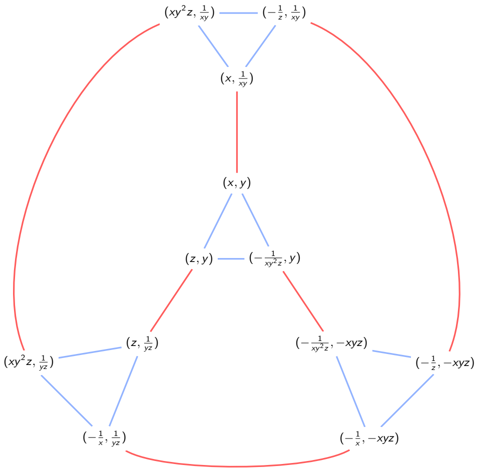


Figure: $\mathcal{O}_{12}$

z est algébrique de degré 2 sur $\mathbb{C}(x,y)$

L'extension galoisienne et le groupe de la marche

On pose $\mathbb{C}(\mathcal{O})$ le corps engendré par les coordonnées de l'orbite.

L'extension galoisienne et le groupe de la marche

On pose $\mathbb{C}(\mathcal{O})$ le corps engendré par les coordonnées de l'orbite.

Bonnet-Hardouin (23) Les extensions suivantes sont galoisiennes.

L'extension galoisienne et le groupe de la marche

On pose $\mathbb{C}(\mathcal{O})$ le corps engendré par les coordonnées de l'orbite.

Bonnet-Hardouin (23) Les extensions suivantes sont galoisiennes.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C}(\mathcal{O}) \arrow[d, dash] \arrow[ddl, dash, bend right, "G_x = Gal\left(\mathbb{C}(\mathcal{O})|\mathbb{C}(x)\right)"'] \arrow[ddr, dash, bend left, "G_y = Gal\left(\mathbb{C}(\mathcal{O})|\mathbb{C}(y)\right)"] & \\
 & \mathbb{C}(E) = \mathbb{C}(x, y) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{C}(x) & & \mathbb{C}(y)
\end{tikzcd}
$$

L'extension galoisienne et le groupe de la marche

On pose $\mathbb{C}(\mathcal{O})$ le corps engendré par les coordonnées de l'orbite.

Bonnet-Hardouin (23) Les extensions suivantes sont galoisiennes.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C}(\mathcal{O}) \arrow[d, dash] \arrow[ddl, dash, bend right, "G_x = Gal\,(\mathbb{C}(\mathcal{O})|\mathbb{C}(x))"'] \arrow[ddr, dash, bend left, "G_y = Gal\,(\mathbb{C}(\mathcal{O})|\mathbb{C}(y))"] & \\
 & \mathbb{C}(E) = \mathbb{C}(x,y) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{C}(x) & & \mathbb{C}(y)
\end{tikzcd}
$$

Le groupe de la marche

$$G = \langle G_x, G_y \rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}(\mathcal{O})).$$

L'extension galoisienne et le groupe de la marche

On pose $\mathbb{C}(\mathcal{O})$ le corps engendré par les coordonnées de l'orbite.

Bonnet-Hardouin (23) Les extensions suivantes sont galoisiennes.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C}(\mathcal{O}) \arrow[ddl, dash, bend right, "G_x = Gal\,(\mathbb{C}(\mathcal{O})|\mathbb{C}(x))"'] \arrow[d, dash] \arrow[ddr, dash, bend left, "G_y = Gal\,(\mathbb{C}(\mathcal{O})|\mathbb{C}(y))"] & \\
& \mathbb{C}(E) = \mathbb{C}(x, y) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{C}(x) & & \mathbb{C}(y)
\end{tikzcd}$$

Le groupe de la marche

$$G = \langle G_x, G_y \rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}(\mathcal{O})).$$

G agit fidèlement et transitivement sur $\mathcal{O}$

L'extension galoisienne et le groupe de la marche

On pose $\mathbb{C}(\mathcal{O})$ le corps engendré par les coordonnées de l'orbite.

Bonnet-Hardouin (23) Les extensions suivantes sont galoisiennes.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C}(\mathcal{O}) \arrow[d, dash] \arrow[ddl, dash, bend right, "G_x = Gal\left(\mathbb{C}(\mathcal{O})|\mathbb{C}(x)\right)"'] \arrow[ddr, dash, bend left, "G_y = Gal\left(\mathbb{C}(\mathcal{O})|\mathbb{C}(y)\right)"] & \\
& \mathbb{C}(E) = \mathbb{C}(x,y) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{C}(x) & & \mathbb{C}(y)
\end{tikzcd}$$

Le groupe de la marche

$$G = \langle G_x, G_y \rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}(\mathcal{O})).$$

G agit fidèlement et transitivement sur $\mathcal{O}$

via un ensemble fini de représentants. (même quand G est infini)

Un résultat de Fried adapté aux marches

Un résultat de Fried adapté aux marches

On a équivalence entre

- L'orbite est finie.

Un résultat de Fried adapté aux marches

On a équivalence entre

- L'orbite est finie.
- Le groupe de la marche G est fini.

Un résultat de Fried adapté aux marches

On a équivalence entre

- L'orbite est finie.
- Le groupe de la marche G est fini.
- Il existe des invariants non-constants $F(X) \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}$ et $G(Y) \in \mathbb{C}(Y) \setminus \mathbb{C}$ tels que

$$F(X) - G(Y) = K(X, Y)H(X, Y).$$

Un résultat de Fried adapté aux marches

On a équivalence entre

- L'orbite est finie.
- Le groupe de la marche G est fini.
- Il existe des invariants non-constants $F(X) \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}$ et $G(Y) \in \mathbb{C}(Y) \setminus \mathbb{C}$ tels que

$$F(X) - G(Y) = K(X, Y)H(X, Y).$$

Algorithme effectif

Un résultat de Fried adapté aux marches

On a équivalence entre

- L'orbite est finie.
- Le groupe de la marche G est fini.
- Il existe des invariants non-constants $F(X) \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}$ et $G(Y) \in \mathbb{C}(Y) \setminus \mathbb{C}$ tels que

$$F(X) - G(Y) = K(X,Y)H(X,Y).$$

Algorithme effectif

Invariants pour $\mathcal{G}_3$

$$\left(\frac{\left(-X^3 - X^4 - X^6 + X^2 + 1\right)t^2 - X^2\left(X^2 - 1\right)t + X^3}{t^2 X \left(X^2+1\right)^2}, \frac{-tY^4 + tY + Y^3 + t}{Y^2 t} \right)$$

Découplage (en orbite finie)

Découplage (en orbite finie)

Une fraction régulière $N(X, Y)$ découple si

$$N(X, Y) = F(X) + G(Y) + K(X, Y)H(X, Y)$$

wit $F(X) \in \mathbb{C}(X)$, $G(Y) \in \mathbb{C}(Y)$ et $H(X, Y)$ regulière.

Découplage (en orbite finie)

Une fraction régulière $N(X, Y)$ découple si

$$N(X, Y) = F(X) + G(Y) + K(X, Y)H(X, Y)$$

wit $F(X) \in \mathbb{C}(X)$, $G(Y) \in \mathbb{C}(Y)$ et $H(X, Y)$ regulière.

Évaluation sur des 0-chaînes: $\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v}(u, v)$ avec $c_{u,v} \in \mathbb{C}$.

Découplage (en orbite finie)

Une fraction régulière $N(X,Y)$ découple si

$$N(X,Y) = F(X) + G(Y) + K(X,Y)H(X,Y)$$

wit $F(X) \in \mathbb{C}(X)$, $G(Y) \in \mathbb{C}(Y)$ et $H(X,Y)$ regulière.

Évaluation sur des 0-chaînes: $\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v}(u,v)$ avec $c_{u,v} \in \mathbb{C}$.

Pour $N(X,Y)$ régulière, on pose

$$N_\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v} N(u,v) \text{ in } \mathbb{C}(\mathcal{O}).$$

Découplage (en orbite finie)

Une fraction régulière $N(X, Y)$ découple si

$$N(X, Y) = F(X) + G(Y) + K(X, Y)H(X, Y)$$

wit $F(X) \in \mathbb{C}(X)$, $G(Y) \in \mathbb{C}(Y)$ et $H(X, Y)$ regulière.

Évaluation sur des 0-chaînes: $\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v}(u, v)$ avec $c_{u,v} \in \mathbb{C}$.

Pour $N(X, Y)$ régulière, on pose

$$N_\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v} N(u, v) \text{ in } \mathbb{C}(\mathcal{O}).$$

Bonnet-Hardouin (23)

Découplage (en orbite finie)

Une fraction régulière $N(X,Y)$ découple si

$$N(X,Y) = F(X) + G(Y) + K(X,Y)H(X,Y)$$

wit $F(X) \in \mathbb{C}(X)$, $G(Y) \in \mathbb{C}(Y)$ et $H(X,Y)$ regulière.

Évaluation sur des 0-chaînes: $\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v}(u,v)$ avec $c_{u,v} \in \mathbb{C}$.

Pour $N(X,Y)$ régulière, on pose

$$N_\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v} N(u,v) \text{ in } \mathbb{C}(\mathcal{O}).$$

Bonnet-Hardouin (23)

Supposons $\mathcal{O}$ finie

Découplage (en orbite finie)

Une fraction régulière $N(X, Y)$ découple si

$$N(X, Y) = F(X) + G(Y) + K(X, Y)H(X, Y)$$

wit $F(X) \in \mathbb{C}(X)$, $G(Y) \in \mathbb{C}(Y)$ et $H(X, Y)$ regulière.

Évaluation sur des 0-chaînes: $\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v}(u, v)$ avec $c_{u,v} \in \mathbb{C}$.

Pour $N(X, Y)$ régulière, on pose

$$N_\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v} N(u, v) \text{ in } \mathbb{C}(\mathcal{O}).$$

Bonnet-Hardouin (23)

Supposons $\mathcal{O}$ finie

Il existe une 0-chaîne α telle que

Découplage (en orbite finie)

Une fraction régulière $N(X, Y)$ découple si

$$N(X, Y) = F(X) + G(Y) + K(X, Y)H(X, Y)$$

wit $F(X) \in \mathbb{C}(X)$, $G(Y) \in \mathbb{C}(Y)$ et $H(X, Y)$ regulière.

Évaluation sur des 0-chaînes: $\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v}(u, v)$ avec $c_{u,v} \in \mathbb{C}$.

Pour $N(X, Y)$ régulière, on pose

$$N_\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v} N(u, v) \text{ in } \mathbb{C}(\mathcal{O}).$$

Bonnet-Hardouin (23)

Supposons $\mathcal{O}$ finie

Il existe une 0-chaîne α telle que

- $N_\alpha \in \mathbb{C}(x, y)$,

Découplage (en orbite finie)

Une fraction régulière $N(X,Y)$ découple si

$$N(X,Y) = F(X) + G(Y) + K(X,Y)H(X,Y)$$

wit $F(X) \in \mathbb{C}(X)$, $G(Y) \in \mathbb{C}(Y)$ et $H(X,Y)$ regulière.

Évaluation sur des 0-chaînes: $\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v}(u,v)$ avec $c_{u,v} \in \mathbb{C}$.

Pour $N(X,Y)$ régulière, on pose

$$N_\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v} N(u,v) \text{ in } \mathbb{C}(\mathcal{O}).$$

Bonnet-Hardouin (23)

Supposons $\mathcal{O}$ finie

Il existe une 0-chaîne α telle que

- $N_\alpha \in \mathbb{C}(x,y)$,
- $N(X,Y)$ découple ssi $N_\alpha = 0$.

Découplage (en orbite finie)

Une fraction régulière $N(X, Y)$ découple si

$$N(X, Y) = F(X) + G(Y) + K(X, Y)H(X, Y)$$

wit $F(X) \in \mathbb{C}(X)$, $G(Y) \in \mathbb{C}(Y)$ et $H(X, Y)$ regulière.

Évaluation sur des 0-chaînes: $\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v}(u, v)$ avec $c_{u,v} \in \mathbb{C}$.

Pour $N(X, Y)$ régulière, on pose

$$N_\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v} N(u, v) \text{ in } \mathbb{C}(\mathcal{O}).$$

Bonnet-Hardouin (23)

Supposons $\mathcal{O}$ finie

Il existe une 0-chaîne α telle que

- $N_\alpha \in \mathbb{C}(x, y)$,
- $N(X, Y)$ découple ssi $N_\alpha = 0$.
- Construction effective du découplage par évaluation.

Découplage (en orbite finie)

Une fraction régulière $N(X, Y)$ découple si

$$N(X, Y) = F(X) + G(Y) + K(X, Y)H(X, Y)$$

wit $F(X) \in \mathbb{C}(X)$, $G(Y) \in \mathbb{C}(Y)$ et $H(X, Y)$ regulière.

Évaluation sur des 0-chaînes: $\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v}(u, v)$ avec $c_{u,v} \in \mathbb{C}$.

Pour $N(X, Y)$ régulière, on pose

$$N_\gamma = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v} N(u, v) \text{ in } \mathbb{C}(\mathcal{O}).$$

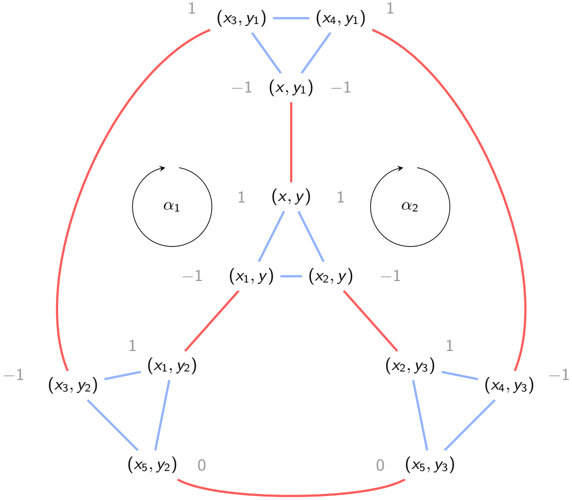
Bonnet-Hardouin (23)

Supposons $\mathcal{O}$ finie

Il existe une 0-chaîne α telle que

- $N_\alpha \in \mathbb{C}(x, y)$,
- $N(X, Y)$ découple ssi $N_\alpha = 0$.
- Construction effective du découplage par évaluation.

$\mathcal{G}_3$



$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ for $\mathcal{G}_3$

Algébricité de $\mathcal{G}_3$

XY découple

$$XY = -\frac{3\lambda X^2 t - \mu\lambda t - 4X}{4t(X^2+\mu)} + \frac{-\lambda Y - 4}{4Y} - \frac{K(X,Y)}{(X^2+\mu)Yt} \quad \text{découples pour } \mathcal{G}_3$$

Algébricité de $\mathcal{G}_3$

XY découple

$XY = f(X) - g(Y) + K(X, Y, t)H$ découples pour $\mathcal{G}_3$

Algébricité de $\mathcal{G}_3$

XY découple

$XY = f(X) - g(Y) + K(X, Y, t)H$ découples pour $\mathcal{G}_3$

$$K(X, Y)Q(X, Y) = XY - A(X) + B(Y)$$

Algébricité de $\mathcal{G}_3$

XY découple

$XY = f(X) - g(Y) + K(X, Y, t)H$ découples pour $\mathcal{G}_3$

$$K(X, Y)\widetilde{Q}(X, Y) = (f(X) - A(X)) - (g(Y) - B(Y))$$

Algébricité de $\mathcal{G}_3$

XY découple

$XY = f(X) - g(Y) + K(X,Y,t)H$ découples pour $\mathcal{G}_3$

$$K(X,Y)\widetilde{Q}(X,Y) = (f(X) - A(X)) - (g(Y) - B(Y))$$

$P_1 = (f(X) - A(X), g(Y) - B(Y))$ est une paire d' invariants formels

Algébricité de $\mathcal{G}_3$

XY découple

$XY = f(X) - g(Y) + K(X, Y, t)H$ découples pour $\mathcal{G}_3$

$$K(X, Y)\widetilde{Q}(X, Y) = (f(X) - A(X)) - (g(Y) - B(Y))$$

$P_1 = (f(X) - A(X), g(Y) - B(Y))$ est une paire d' invariants formels

Orbite finie ssi Invariants rationnels

Algébricité de $\mathcal{G}_3$

XY découple

$XY = f(X) - g(Y) + K(X, Y, t)H$ découples pour $\mathcal{G}_3$

$$K(X, Y)\widetilde{Q}(X, Y) = (f(X) - A(X)) - (g(Y) - B(Y))$$

$P_1 = (f(X) - A(X), g(Y) - B(Y))$ est une paire d' invariants formels

Orbite finie ssi Invariants rationnels

$$P_2 = \left(\frac{\left(-\lambda^2\mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3\right)t^2 - X^2\lambda\left(X^2 - \mu\right)t + X^3}{t^2 X\left(X^2 + \mu\right)^2}, \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \right).$$

Algébricité de $\mathcal{G}_3$

XY découple

$XY = f(X) - g(Y) + K(X, Y, t)H$ découples pour $\mathcal{G}_3$

$$K(X, Y)\widetilde{Q}(X, Y) = (f(X) - A(X)) - (g(Y) - B(Y))$$

$P_1 = (f(X) - A(X), g(Y) - B(Y))$ est une paire d' invariants formels

Orbite finie ssi Invariants rationnels

$$P_2 = \left(\frac{\left(-\lambda^2\mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3\right)t^2 - X^2\lambda\left(X^2 - \mu\right)t + X^3}{t^2 X\left(X^2 + \mu\right)^2}, \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \right).$$

Stratégie de Bousquet-Mélou pour le 3/4-plan donne l'algébricité

Algébricité de $\mathcal{G}_3$

XY découple

$XY = f(X) - g(Y) + K(X, Y, t)H$ découples pour $\mathcal{G}_3$

$$K(X, Y)\widetilde{Q}(X, Y) = (f(X) - A(X)) - (g(Y) - B(Y))$$

$P_1 = (f(X) - A(X), g(Y) - B(Y))$ est une paire d' invariants formels

Orbite finie ssi Invariants rationnels

$$P_2 = \left(\frac{\left(-\lambda^2\mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3\right)t^2 - X^2\lambda\left(X^2 - \mu\right)t + X^3}{t^2 X\left(X^2+\mu\right)^2}, \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \right).$$

Stratégie de Bousquet-Mélou pour le 3/4-plan donne l'algébricité

Interprétation géométrique

$$E = \overline{\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | K(x, y) = 0\}}$$

Interprétation géométrique

$$E = \overline{\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | K(x, y) = 0\}}$$

Supposons que E est irréductible

Interprétation géométrique

$$E = \overline{\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | K(x, y) = 0\}}$$

Supposons que E est irréductible
Petits pas

Interprétation géométrique

$$E = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | K(x,y) = 0\}}$$

Supposons que E est irréductible

Petits pas

- Le genre de E est 0 ou 1

Interprétation géométrique

$$E = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | K(x,y) = 0\}}$$

Supposons que E est irréductible

Petits pas

- Le genre de E est 0 ou 1
- $\mathrm{Aut}(E)$ est infini et le groupe de la marche $G \subset \mathrm{Aut}(E)$ peut l'être aussi.

Interprétation géométrique

$$E = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | K(x,y) = 0\}}$$

Supposons que E est irréductible

Petits pas

- Le genre de E est 0 ou 1
- $\mathrm{Aut}(E)$ est infini et le groupe de la marche $G \subset \mathrm{Aut}(E)$ peut l'être aussi.

Interprétation géométrique

$$E = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | K(x,y) = 0\}}$$

Supposons que E est irréductible

Petits pas

- Le genre de E est 0 ou 1
- $\mathrm{Aut}(E)$ est infini et le groupe de la marche $G \subset \mathrm{Aut}(E)$ peut l'être aussi.

Grand pas

Interprétation géométrique

$$E = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | K(x,y) = 0\}}$$

Supposons que E est irréductible

Petits pas

- Le genre de E est 0 ou 1
- $\mathrm{Aut}(E)$ est infini et le groupe de la marche $G \subset \mathrm{Aut}(E)$ peut l'être aussi.

Grand pas

- Le genre de E est strictement plus grand que 1 si E lisse.

Interprétation géométrique

$$E = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | K(x,y) = 0\}}$$

Supposons que E est irréductible

Petits pas

- Le genre de E est 0 ou 1
- $\mathrm{Aut}(E)$ est infini et le groupe de la marche $G \subset \mathrm{Aut}(E)$ peut l'être aussi.

Grand pas

- Le genre de E est strictement plus grand que 1 si E lisse.
- Quand G est fini,
  $G \subset \mathrm{Aut}(M)$ avec M un revêtement fini de E.

Interprétation géométrique

$$E = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | K(x,y) = 0\}}$$

Supposons que E est irréductible

Petits pas

- Le genre de E est 0 ou 1
- $\mathrm{Aut}(E)$ est infini et le groupe de la marche $G \subset \mathrm{Aut}(E)$ peut l'être aussi.

Grand pas

- Le genre de E est strictement plus grand que 1 si E lisse.
- Quand G est fini,
  $G \subset \mathrm{Aut}(M)$ avec M un revêtement fini de E.
- Quand G est infini,
  G n'est pas un sous-groupe d'automorphismes d'un revêtement de E.

Interprétation géométrique

$$E = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | K(x,y) = 0\}}$$

Supposons que E est irréductible

Petits pas

- Le genre de E est 0 ou 1
- $\mathrm{Aut}(E)$ est infini et le groupe de la marche $G \subset \mathrm{Aut}(E)$ peut l'être aussi.

Grand pas

- Le genre de E est strictement plus grand que 1 si E lisse.
- Quand G est fini,
  $G \subset \mathrm{Aut}(M)$ avec M un revêtement fini de E.
- Quand G est infini,
  G n'est pas un sous-groupe d'automorphismes d'un revêtement de E.

Merci pour votre attention!