Forme-produit, grands réseaux de Jackson fermés: application aux systèmes de vélo/autopartage

Christine Fricker, Inria Paris, DI-ENS

with Danielle Tibi, Paris Cité

Un quart de siècle pour un quart de plan, 16/04/2025

Plan

- Motivation
- Modèle and analyse
- Travaux en cours

Motivation: vélo et autopartage

Velib' (F. Meunier-T. Pradeau/D. Chemla)

Velib'

Flex Communauto Montreal

Autolib'

Systèmes de partage: de grands réseaux stochastiques

- M vélos/voitures
- N stations
- **Velib'**: l'usager prend un vélo en station, fait un trajet vers une station et le dépose.

Deux types d'échecs d'utilisation

- pas de vélo= rejet,
- pas de place de parking = va à une autre station

Motivation: bike/car sharing

Velib'

Flex Communauto
Montreal

Autolib'

Bike/car-sharing: des réseaux

- M vélos/voitures
- N stations
- Communauto: l'usager **réserve** (30 mn) puis prend la voiture à une *station*, fait un trajet vers une *station* puis s'y gare.

Deux types d'échecs d'utilisation

- pas de vélo= rejet,
- pas de place de parking = va à une autre station

Motivation: bike/car sharing

Velib'

Flex Communauto Montreal

Autolib'

Bike/car-sharing: des réseaux

- M vélos/voitures
- N stations
- Autolib' (simplifié): l'usager prend une voiture à une station et **réserve une place de parking** (1h30) à une autre station et fait son trajet et gare la voiture.

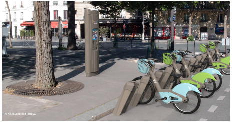
Deux types d'échecs d'utilisation

- pas de vélo= rejet,
- pas de place de parking = rejet

(Retour à Velib') il y a déséquilibre

vide

saturée



équilibrée

Inhomogénéité inévitable:
stations populaires$\neq$ destinations populaires

But du travail: évaluer ces probabilités d'échecs

- pas de vélo/voiture
- pas de place de parking

Premiers modèles: à forme-produit

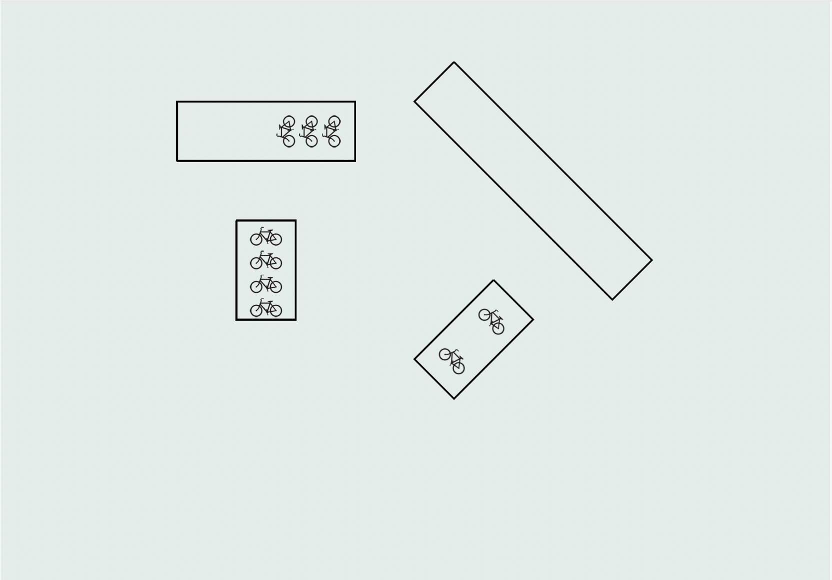
- Réseaux de Jackson à capacité illimitée
  - $N, M \to +\infty$ Fayolle-Lasgouttes'96 (pour Praxitèle?)
  - $N, M \to +\infty$ Malyshev-Yakovlev'96 analytique
  - N fixé, $M \to +\infty$ George-Xia'10 pour bike-sharing

Premiers modèles: à forme-produit

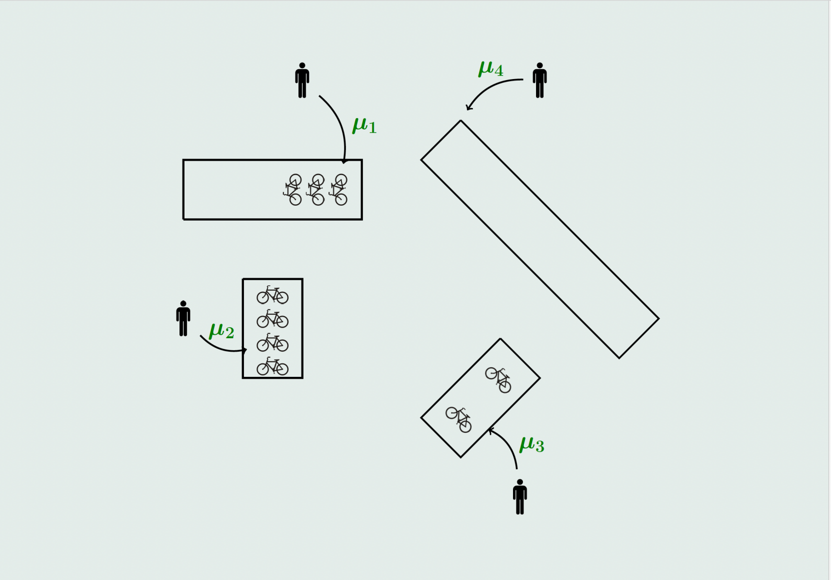
- Réseaux de Jackson à capacité illimitée
  - $N, M \to +\infty$ Fayolle-Lasgouttes'96 (pour Praxitèle?)
  - $N, M \to +\infty$ Malyshev-Yakovlev'96 analytique
  - N fixé, $M \to +\infty$ George-Xia'10 pour bike-sharing

  - Pas de blockage des vélos/voitures (le parking est possible)
  - mais rejet des usagers (stations vides)
- Le cadre:
  - p.p.Poisson (μ_i) pour les arrivées d'usagers à la station i
  - trajet de station i à j avec probabilité q_{ij} : matrice de routage Q Markovienne irréductible de vecteur invariant ν
  - durée de trajet de i à j exp($\mu_{[ij]}$)

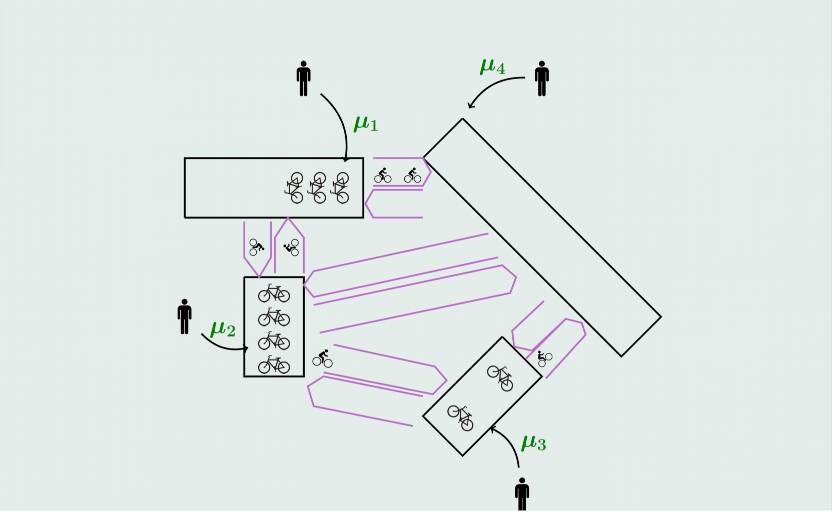
Sur un dessin.



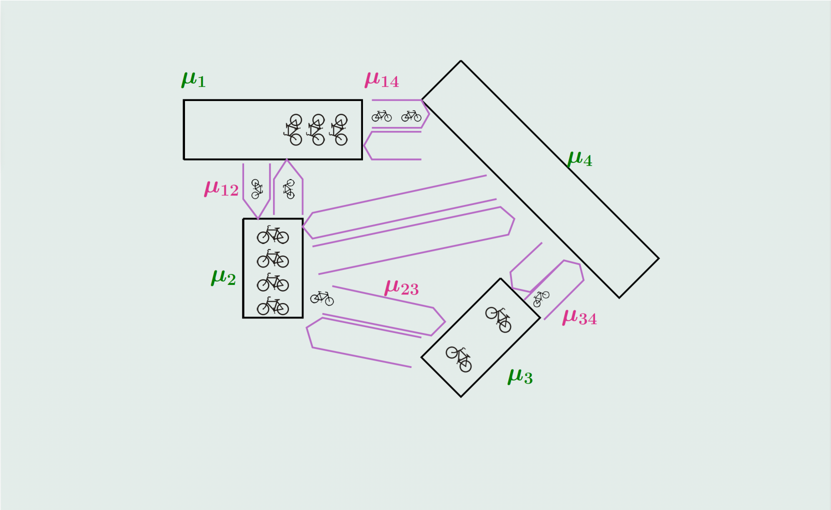
Sur un dessin.



Sur un dessin.



Sur un dessin.



C'est un réseau de Jackson fermé

On oublie les usagers. On considère les vélos. Ils sont:

- alternativement aux stations et aux routes
- attendent leur tour aux stations: file à un serveur
- simultanément en service sur les routes: une infinité de serveurs

$\Rightarrow$ vélos $=$ clients d'un réseau de Jackson fermé avec deux types de noeuds

- N à un serveur : stations i
- N^2 à une infinité de serveurs: routes $[ij]$

$\Rightarrow$ Mesure invariante à forme produit.

Notre travail: stations à capacité finie

Dans F-Tibi (AAP'18),

1. Un modèle
   - Réseau de Jackson avec capacité finie pour les systèmes de vélopartage
   - qui a une mesure invariante à forme produit.
2. Analyse
   - en stationnaire , en limite grand système (thermodynamique) ($N \to \infty,\ M/N \to cst$)
   - on montre l'*indépendance asymptotique* , avec des marginales explicites
   - en prouvant l'équivalence d'ensembles

Equivalence d'ensembles

Considérons une mesure à forme produit

$$\pi(x) = \mathbb{P}(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_N = x_N) = \frac{1}{Z} \prod_{l=1}^{N} \phi_l(x_l)$$

sur un espace d'états non-produit

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{N}^N, \sum_{l=1}^{N} x_l = M, x_l \leq c_l \text{ si } c_l < +\infty\}$$

avec $1 \leq c_l \leq +\infty$ et la constante de normalisation Z .

Equivalence d'ensembles

Considérons une mesure à forme produit

$$\pi(x) = \mathbb{P}(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_N = x_N) = \frac{1}{Z} \prod_{l=1}^{N} \phi_l(x_l)$$

sur un espace d'états non-produit

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{N}^N, \sum_{l=1}^{N} x_l = M, x_l \leq c_l \text{ si } c_l < +\infty\}$$

avec $1 \leq c_l \leq +\infty$ et la constante de normalisation Z .

Alors pour tout $\gamma > 0$,

$$\pi(x) = \frac{1}{Z(\gamma)} \prod_{l=1}^{N} \gamma^{x_l} \phi_l(x_l) = \mathbb{P}(\eta_1^\gamma = x_1, \ldots \eta_N^\gamma = x_N | \sum_{l=1}^{N} \eta_l^\gamma = M)$$

où $\eta_1^\gamma, \ldots, \eta_N^\gamma$ sont indépendants de lois

$$\mathbb{P}(\eta_l^\gamma = x_l) = \frac{1}{Z_l(\gamma)} \gamma^{x_l} \phi_l(x_l), \quad x_l \leq c_l \text{ si } c_l < +\infty.$$

Equivalence d'ensembles

- On indexe par N.
- La marginale k-dimensionelle de π est

$$\mathbb{P}(\xi_{1,N} = x_1, \ldots, \xi_{k,N} = x_k) = \mathbb{P}(\eta^\gamma_{1,N} = x_1, \ldots \eta^\gamma_{k,N} = x_k | \sum_{l=1}^{N} \eta^\gamma_{l,N} = M)$$

$$= \mathbb{P}(\eta^\gamma_{1,N} = x_1, \ldots \eta^\gamma_{k,N} = x_k) \frac{\mathbb{P}(\sum_{l=k+1}^{N} \eta^\gamma_{l,N} = M - \sum_{l=1}^{k} x_l)}{\mathbb{P}(\sum_{l=1}^{N} \eta^\gamma_{l,N} = M)}$$

Equivalence d'ensembles

- On indexe par N.
- La marginale k-dimensionelle de π est

$$\mathbb{P}(\xi_{1,N} = x_1, \dots, \xi_{k,N} = x_k) = \mathbb{P}(\eta^{\gamma}_{1,N} = x_1, \dots \eta^{\gamma}_{k,N} = x_k | \sum_{l=1}^{N} \eta^{\gamma}_{l,N} = M)$$

$$= \mathbb{P}(\eta^{\gamma}_{1,N} = x_1, \dots \eta^{\gamma}_{k,N} = x_k) \frac{\mathbb{P}(\sum_{l=k+1}^{N} \eta^{\gamma}_{l,N} = M - \sum_{l=1}^{k} x_l)}{\mathbb{P}(\sum_{l=1}^{N} \eta^{\gamma}_{l,N} = M)}$$

- On choisit γ_N (unique) tel que $\mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{N} \eta^{\gamma_N}_{l,N}\right) = M$.

Equivalence d'ensembles

- On indexe par N.
- La marginale k-dimensionelle de π est

$$\mathbb{P}(\xi_{1,N} = x_1, \dots, \xi_{k,N} = x_k) = \mathbb{P}(\eta^\gamma_{1,N} = x_1, \dots \eta^\gamma_{k,N} = x_k | \sum_{l=1}^{N} \eta^\gamma_{l,N} = M)$$

$$= \mathbb{P}(\eta^\gamma_{1,N} = x_1, \dots \eta^\gamma_{k,N} = x_k) \frac{\mathbb{P}(\sum_{l=k+1}^{N} \eta^\gamma_{l,N} = M - \sum_{l=1}^{k} x_l)}{\mathbb{P}(\sum_{l=1}^{N} \eta^\gamma_{l,N} = M)}$$

- On choisit γ_N (unique) tel que $\mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{N} \eta^{\gamma_N}_{l,N}\right) = M$.
- On montre un théorème central limite local pour des variables indépendantes non i.d..

Local Limit Theorem

Let $(\eta_{l,N})_{1\leq l\leq N}$ be independent $\mathbb{Z}$-valued r.v. and

$$S_N = \sum_{l=1}^{N} \eta_{l,N}, \quad a_N = \mathbb{E}(S_N) \text{ and } \quad b_N^2 = \mathrm{Var} S_N.$$

Assume

1. $\lim_N b_N = +\infty$,
2. $\exists\delta > 0, \sum_{l=1}^{N} \mathbb{E}(|\eta_{l,N} - m_{l,N}|^{2+\delta}) = o(b_N^{2+\delta})$ as $N \to \infty$,
3. $\exists\Phi \in L^1(\mathbb{R}), \forall N \geq 1, t \in [-\pi, \pi], \mathbb{E}(|\eta_{l,N} - m_{l,N}|^{2+\delta}) \leq \Phi(b_N t)$.

then

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left[b_N\sqrt{2\pi}\mathbb{P}(S_N = k) - exp(-\frac{(k-a_N)^2}{b_N^2}) \right] = 0.$$

Lemma (Gnedenko'48)

X r.v. on $\mathbb{Z}$, $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ and $s = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{p_{2l}p_{2l+1}}{p_{2l}+p_{2l+1}}$. Then,

$$|\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)| \leq e^{-2st^2/\pi^2} \quad |t| \leq \pi.$$

Equivalence d'ensembles

- Si $N, M \to \infty$ et, pour $b_N^2 = \mathrm{Var}(\eta_{1,N}^{\gamma_N}) + \ldots + \mathrm{Var}(\eta_N^{\gamma_N})$, $b_N \to \infty$ et $\sum_{l=1}^N \mathbb{E}\left(|\eta_{l,N}^{\gamma_N} - \mathbb{E}(\eta_{l,N}^{\gamma_N})|^3\right) = o(b_N^3)$ then

$$\mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{N} \eta_{l,N}^{\gamma_N} = M\right) \sim \mathbb{P}\left(\sum_{l=k+1}^{N} \eta_{l,N}^{\gamma_N} = M - \sum_{l=1}^{k} x_l\right) \sim (b_N\sqrt{2\pi})^{-1}.$$

D'où
$\mathbb{P}(\xi_{1,N} = x_1, \ldots, \xi_{k,N} = x_k) \sim \mathbb{P}(\eta_{1,N}^{\gamma_N} = x_1, \ldots, \eta_{k,N}^{\gamma_N} = x_k)$.

Equivalence d'ensembles

- Si $N, M \to \infty$ et, pour $b_N^2 = \mathrm{Var}(\eta_{1,N}^{\gamma_N}) + \ldots + \mathrm{Var}(\eta_N^{\gamma_N})$, $b_N \to \infty$ et $\sum_{l=1}^N \mathbb{E}\left(|\eta_{l,N}^{\gamma_N} - \mathbb{E}(\eta_{l,N}^{\gamma_N})|^3\right) = o(b_N^3)$ then

$$\mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{N} \eta_{l,N}^{\gamma_N} = M\right) \sim \mathbb{P}\left(\sum_{l=k+1}^{N} \eta_{l,N}^{\gamma_N} = M - \sum_{l=1}^{k} x_l\right) \sim (b_N\sqrt{2\pi})^{-1}.$$

D'où
$\mathbb{P}(\xi_{1,N} = x_1, \ldots, \xi_{k,N} = x_k) \sim \mathbb{P}(\eta_{1,N}^{\gamma_N} = x_1, \ldots, \eta_{k,N}^{\gamma_N} = x_k)$.
De plus $Z \sim \gamma_N^{-M}(b_N\sqrt{2\pi})^{-1}\prod_{l=1}^N Z_l(\gamma_N)$.

Equivalence d'ensembles

- Si $N, M \to \infty$ et, pour $b_N^2 = \mathrm{Var}(\eta_{1,N}^{\gamma_N}) + \ldots + \mathrm{Var}(\eta_N^{\gamma_N})$, $b_N \to \infty$ et $\sum_{l=1}^N \mathbb{E}\left(|\eta_{l,N}^{\gamma_N} - \mathbb{E}(\eta_{l,N}^{\gamma_N})|^3\right) = o(b_N^3)$ then

$$\mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^N \eta_{l,N}^{\gamma_N} = M\right) \sim \mathbb{P}\left(\sum_{l=k+1}^N \eta_{l,N}^{\gamma_N} = M - \sum_{l=1}^k x_l\right) \sim (b_N\sqrt{2\pi})^{-1}.$$

D'où
$\mathbb{P}(\xi_{1,N} = x_1, \ldots, \xi_{k,N} = x_k) \sim \mathbb{P}(\eta_{1,N}^{\gamma_N} = x_1, \ldots, \eta_{k,N}^{\gamma_N} = x_k)$.
De plus $Z \sim \gamma_N^{-M}(b_N\sqrt{2\pi})^{-1}\prod_{l=1}^N Z_l(\gamma_N)$.

Références

A. I. Khinchin (1949) (approximation *grand canonique*)
R.L. Dobrushin and B. Tirozzi (1977) (*mesures de Gibbs*)
C. Kipnis and C. Landim (1999) (*zero range*)

Modèle de bike-sharing avec capacité finie

- La station i a une capacité $c_{i,N} < +\infty$

Modèle de bike-sharing avec capacité finie

- La station i a une capacité $c_{i,N} < +\infty$
- Mêmes dynamiques que précédemment, mais
- si la station j est saturée,
  le vélo en fin de route $[ij]$ prend la route $[jk]$ avec proba q_{jk}.

Modèle de bike-sharing avec capacité finie

- La station i a une capacité $c_{i,N} < +\infty$
- Mêmes dynamiques que précédemment, mais
- si la station j est saturée,
  le vélo en fin de route $[ij]$ prend la route $[jk]$ avec proba q_{jk}.

Theorem (Forme-produit, F-Tibi'18)

Loi stationnaire (de l'état des noeuds):

$$\pi(x) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^{N} (\nu_i/\mu_i)^{x_i} \prod_{1 \le i,j \le N} \frac{(\nu_i q_{ij}/\mu_{[ij]})^{x_{[ij]}}}{x_{[ij]}!}$$

sur l'espace $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{N}^{N+N^2}, \sum_i x_i + \sum_{ij} x_{[ij]} = M, \text{ et } x_i \le c_i\}$.

Modèle de bike-sharing avec capacité finie

- La station i a une capacité $c_{i,N} < +\infty$
- Mêmes dynamiques que précédemment, mais
- si la station j est saturée,
  le vélo en fin de route $[ij]$ prend la route $[jk]$ avec proba q_{jk}.

Theorem (Forme-produit, F-Tibi'18)

Loi stationnaire (de l'état des noeuds):

$$\pi(x) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^{N} (\nu_i/\mu_i)^{x_i} \prod_{1 \leq i,j \leq N} \frac{(\nu_i q_{ij}/\mu_{[ij]})^{x_{[ij]}}}{x_{[ij]}!}$$

sur l'espace $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{N}^{N+N^2}, \sum_i x_i + \sum_{ij} x_{[ij]} = M, \text{ et } x_i \leq c_i\}$.

Preuve: Cas particulier de la politique blocage et reroutage (Quadrat-Viot'80, Economou-Fakinos'98)

Modèle de bike-sharing avec capacité finie

Theorem (Grand système, F-Tibi'18)

Supposons $N, M \to \infty$, $M/N \to cst$, $\exists C, c_{i,N} \leq C$, $\mu_{i,N}, \mu_{[ij],N} = O(1)$ *and* $\nu_{i,N} = O(1/N)$.
Alors un nombre fini de stations et routes sont asymptotiquement indépendantes avec lois limites

- *geom(* $\gamma_N \nu_{i,N}/\mu_{i,N}, c_{i,N})$ *pour la station* i
- *Poisson* $(\gamma_N \nu_{i,N} q_{ij}/\mu_{[ij],N})$ *pour la route* $[ij]$

où γ_N *est solution de*

$$\sum_i \mathbb{E}(geom(\gamma_N \nu_{i,N}/\mu_{i,N}, c_{i,N})) + \sum_{ij} \gamma_N(\nu_{i,N} q_{ij}/\mu_{[ij],N}) = M.$$

Preuve: appliquer le Theorème Central Limite Local pour une famille de variables de lois géométriques tronquées ou Poisson.
Remarque: Pour une version avec une-route : indépendance seulement pour les stations.

Performance

supposons connus les paramètres $c_{i,N}, \mu_{i,N}, \mu_{i,Nj}, q_{i,Nj}$ (thus $\nu_{i,N}$),

choisir $M \iff$ choisir γ_N.

Optimiser un paramètre de performance.
Par example, le taux total de rejet+blocage

$$\tau = \sum_i \mu_i \mathbb{P}(\xi_i = 0) + \sum_{ij} \mu_{[ij]} \mathbb{E}(\xi_{[ij]} \mathbb{1}_{\xi_j = c_j})$$

est asymptotiquement

$$\tau \sim \sum_i \mu_i \frac{1 + (\gamma\nu_i/\mu_i)^{c_i+1}}{\sum_{i=0}^{c_i} (\gamma\nu_i/\mu_i)^k}$$ et peut être minimisé p/r γ.

homogène: $\tau \sim 2\mu \frac{N}{c+1}$, $M_{opt} \sim \left(\frac{c}{2} + \frac{\mu_S}{\mu_R}\right) N$ (F-Gast'16).

En cours: d'autres modèles tractables

Forme-produit et équivalence d'ensembles pour

- réservation de la voiture
  (un modèle *simple* pour le free-floating car-sharing)
  (F-Popescu et al.'21, F-Mohamed+25)
  (geom tronquée$\leftarrow$ somme tronquée de Poisson & geom)

Forme-produit pour

- *notre nouveau* modèle pour le free-floating car-sharing
  Jackson avec deux classes de clients:
  - internes (voitures autopartage)
  - *externes* (voitures privées)

  car-sharing en environment aléatoire rapidement variable
  (champ-moyen F-Mohamed-Rigonat'24)
- système bike/e-bike (Velib' actuel)

Pas de forme-produit pour

- réservation du parking (Autolib'):
  $\Longleftrightarrow$ réseau de Jackson blocage$+$ routage non réversible.

Conclusion et travail futur

- une approche directe pour le comportement stationnaire du grand système quand il y a forme-produit
- par une preuve probabiliste

Prouver l'équivalence d'ensembles dans des cadres + compliqués

- *notre* modèle avec environnement variable (free-floating car-sharing)
  scaling ?
- bike/e-bike
  - Prouver un théorème central limite local en dimension 2?
  - Trouver une fonction de Lyapunov pour l'ODE champ-moyen?
  - Si on prend un vélo si pas de e-vélo et vice-versa (J.Ancel21): Coupled processors (Fayolle-Iasnogorodski'79) 1/4 de plan.

Merci!