Trafic en accordéon dans les modèles de voiture suiveuse

ou « **À l'assaut de la méthode du col** »

Guy Fayolle et Jean-Marc Lasgouttes

Inria

Un quart de siècle pour un quart de plan — 15–17 avril 2025 — Marseille

I Avant propos
II Mise en place du modèle
III Utilisation de la méthode du col
IV Classification en fonction de τ
V Conclusions
VI Pas le temps pour ça (bonus)

Avant propos personnel

Où est le quart de plan ?

Pourquoi c'est quand même dans le sujet de cette conférence

Comment nous sommes-nous lancés là-dedans ?

Avant propos technique

Contexte trafic autoroutier instable où chaque véhicule amplifie les perturbations

- crée un un phénomène d'accordéon

Modèle de voiture suiveuse (car-following model) : la trajectoire d'une voiture dépend de la précédente

- Intelligent Driver Model, Optimal Velocity Model...

But de cette étude Calculer asymptotiquement la forme de l'onde de trafic après ≈ 20 véhicules quand le trafic est instable

- Aujourd'hui je vais insister sur la méthode du col

Véritable but de cette étude plus tard si j'ai le temps !

Rapport Guy Fayolle et Jean-Marc Lasgouttes, *Stop-and-go waves in car-following models*, INRIA Paris, Équipe ASTRA, 2025.

I Avant propos
II Mise en place du modèle
III Utilisation de la méthode du col
IV Classification en fonction de τ
V Conclusions
VI Pas le temps pour ça (bonus)

Modèle de voiture suiveuse

Variables $x_j(t)$ abscisse curviligne du véhicule j sur la route au temps t, $v_j(t)$ vitesse et $a_j(t)$ accélération

- j suit $j-1$, $j-2$... et tout le monde est derrière 0.

Le modèle l'accélération dépend de la distance au véhicule précédent, de la vitesse relative et de la vitesse

$$a_j(t) = f\big(x_{j-1}(t) - x_j(t), v_{j-1}(t) - v_j(t), v_j(t)\big) \stackrel{\text{def}}{=} f\big(\Delta x_j(t), \Delta v_j(t), v_j(t)\big).$$

Condition d'équilibre La relation entre l'inter-distance Δx^* et la vitesse v^* est

$$0 = f(\Delta x^*, 0, v^*).$$

Linéarisation autour du point d'équilibre $(\Delta x^*, 0, v^*)$ (les coefficients sont positifs)

$$a_j(t) = \alpha(\Delta x_j(t) - \Delta x^*) + \beta \Delta v_j(t) - \gamma(v_j(t) - v^*).$$

Résolution de l'équation

Trajectoire de référence à l'équilibre $x_N^*(t) = v^* t - N\Delta x^*$.

Solution Si $X_j(z)$ est la transformée de Laplace de $x_j(t) - x_j^*(t)$, alors la fonction de transfert est

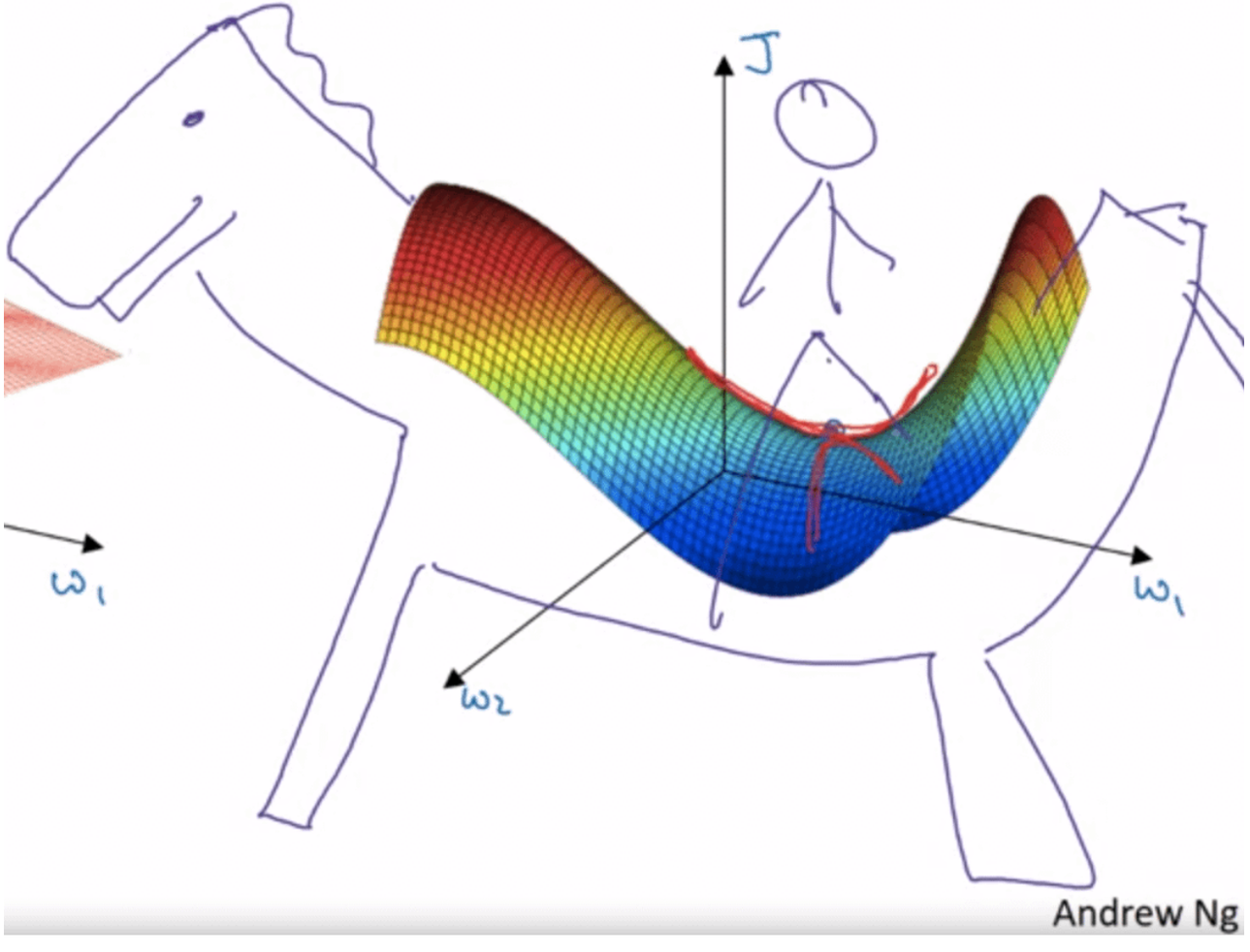
$$Q(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{X_j(z)}{X_{j-1}(z)} = \frac{\beta z + \alpha}{z^2 + (\beta + \gamma)z + \alpha} \qquad \text{et} \quad X_j(z) = X_0(z) Q^N(z).$$

Formule d'inversion La trajectoire du véhicule N en temps long est, pour n'importe quel u réel à droite des pôles de Q,

$$x_N(N\tau) = x_N^*(N\tau) + \frac{1}{2i\pi} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} X_0(z) \left[e^{\tau z} Q(z)\right]^N dz.$$

- Comment calculer ça ? Avec la méthode du col.

La méthode du col (ou du point-selle)



La méthode du col (ou du point-selle)

Principe Choisir un chemin d'intégration $\mathcal{L}$ qui traverse à son sommet (en module) une solution de $h'(z_0) = 0$ dans la direction de plus grande pente

Résultat (voir Dieudonné ou Lavrantiev et Chabat)

$$\int_{\mathcal{L}} g(z)e^{Nh(z)}dz = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|h''(z_0)|}}e^{i\frac{\pi-\alpha}{2}}g(z_0)e^{\lambda h(z_0)}, \quad \text{quand } N \to \infty.$$

Où est le piège ? deux écueils principaux

- Le col peut être « caché » derrière un un pôle de l'intégrande,
- Il peut être impossible de trouver un chemin d'intégration acceptable.

I Avant propos
II Mise en place du modèle
III Utilisation de la méthode du col
IV Classification en fonction de τ
V Conclusions
VI Pas le temps pour ça (bonus)

Rappel du problème

L'intégrale ici est de la forme

$$I(\tau N, N) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i\pi} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} \phi(z) \left[e^{\tau z} Q(z)\right]^N dz.$$

Chemin d'intégration

- en théorie on peut le tordre assez librement
- ici on a de la chance, on peut s'en sortir en faisant simplement varier u à droite des pôles de Q
- Le système est stable, il y a deux pôles de partie réelle négative $\Re d \leq u_{\min} < 0$.

Instabilité de chaîne on suppose $(\beta + \gamma)^2 - \beta^2 < 2\alpha$.

Le point col

Définition on cherche à annuler la dérivée $e^{\tau z}Q(z)$ et donc

$$\tau = -\frac{Q'(z)}{Q(z)} \stackrel{\text{def}}{=} T(z).$$

Solutions quand $\tau > 0$, il y a trois solutions, réelles ou complexes. Laquelle prendre ?

Idée pour chaque abscisse u possible, on détermine quel est le τ pour lequel l'intégrande a un point col utilisable de partie réelle u.

Classification par l'abscisse

Lemme pour $u > u_{\min}$, et $T'(u) < 0$, $y \mapsto |Q(u+iy)|$ atteint son maximum en $y = 0$

- u peut être utilisé comme point col quand $T(u) = \tau$.

Calcul asymptotique pour $u > u_{\min}$, et $T'(u) < 0$, quand N est grand

$$I(T(u)N; N) \approx \frac{\phi(u)[e^{uT(u)}Q(u)]^N}{\sqrt{2\pi N|T'(u)|}}.$$

Classification par l'abscisse (suite)

Lemme pour $u > u_{\min}$, et $T'(u) > 0$,

1. Les solutions de $\Im T(z) = 0$ sont de la forme $u \pm iy_u$ où y_u est solution d'une équation quadratique.
2. $y \mapsto |Q(u+iy)|$ atteint ses maxima en $y = \pm y_u$.

- $z_u = u + iy_u$ et $\bar{z}_u$ peuvent être utilisé comme points cols quand $T(z_u) = \tau$.

Calcul asymptotique pour $u > u_{\min}$, et $T'(u) > 0$, quand N est grand

$$I(T(z_u)N; N) \approx \frac{2\Re\left[\phi(z_u)[e^{z_u T(z_u)}Q(z_u)]^N\right]}{\sqrt{2\pi N\left|T'(z_u)\right|}}.$$

- pour chaque u, on sait calculer notre asymptotique, mais en fonction de τ ?

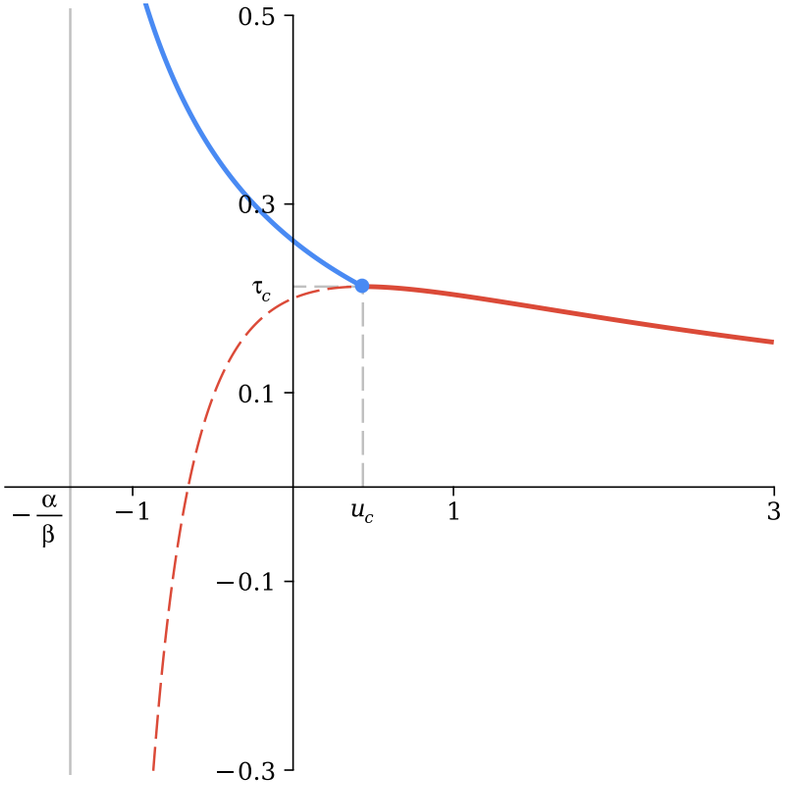
I Avant propos
II Mise en place du modèle
III Utilisation de la méthode du col
IV Classification en fonction de τ
V Conclusions
VI Pas le temps pour ça (bonus)

L'arrivée de l'onde

Lemme

1. $u_c = \arg\max_{u>0} T(u)$ est unique.
2. $\tau_c \overset{\text{def}}{=} T(u_c) > 0$.
3. Z est une bijection décroissante.

$$Z :]0, \tau_c[\mapsto]u_c, \infty[$$
$$\tau \mapsto u = T^{-1}(\tau)$$



- $x_N(\tau N) - x_N^*(\tau N) \approx \dfrac{X_0(Z(\tau))}{\sqrt{2\pi N \left|T'(Z(\tau))\right|}} \Big[e^{\tau Z(\tau)} Q(Z(\tau))\Big]^N$ si $\tau < \tau_c$.

Vitesse de l'onde de trafic

Début d'onde Il existe un unique $u_w > u_c$, et $\tau_w \overset{\text{def}}{=} T(u_w) < \tau_c$, tel que

$$e^{u_w T(u_w)} Q(u_w) = 1$$

et donc

$$x_N(\tau_w N) - x_N^*(\tau_w N) \approx \frac{X_0(u_w)}{\sqrt{2\pi |T'(u_w)| N}}, \text{ as } N \to \infty.$$

Vélocité de l'onde c'est la distance parcourue divisée par le temps

$$\frac{x_N(\tau_w N) - x_0(0)}{\tau_w N} = v^* - \frac{\Delta x^*}{\tau_w} + \mathcal{O}(N^{-3/2}).$$

- l'onde remonte le trafic

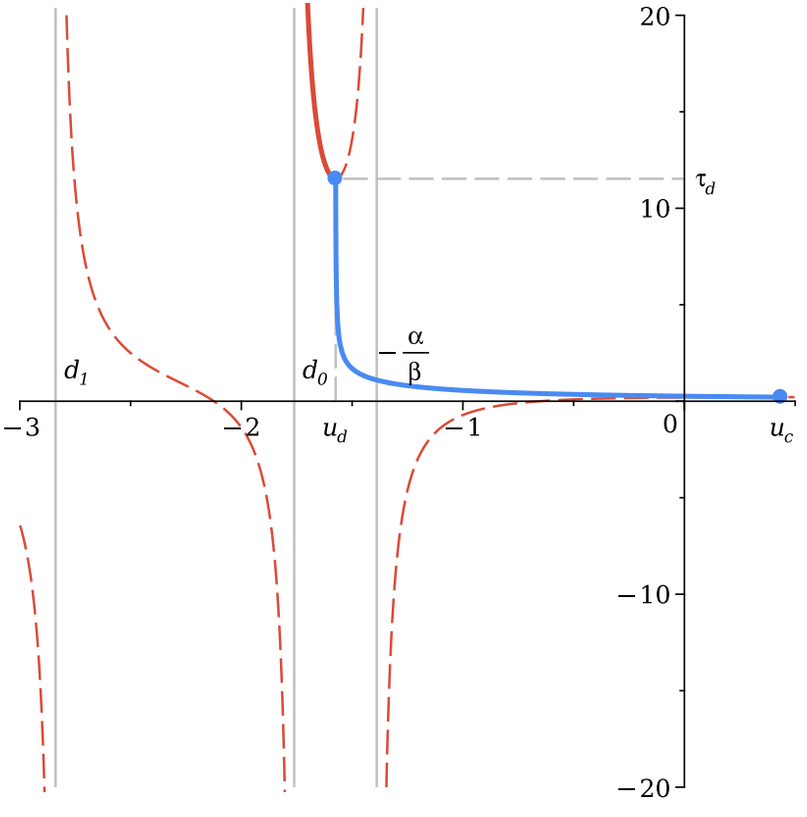
Le ventre de l'onde

Hypothèse On suppose $(\beta+\gamma)^2 > 4\alpha$.

- Q a deux pôle réels négatifs.

Lemme

1. $u_d = \arg\max_{u\in]u_{\min},u_c[} T(u)$ est unique.
2. $\tau_d \overset{\text{def}}{=} T(u_c) > 0$.
3. On peut étendre Z fonction décroissante de $\tau > 0$ sur $]u_{\min}, \infty[$.
   Quand $\tau \in]\tau_c, \tau_d[$, $Z(\tau)$ est de la forme $u + iy_u$.



I Avant propos
II Mise en place du modèle
III Utilisation de la méthode du col
IV Classification en fonction de τ
V Conclusions
VI Pas le temps pour ça (bonus)

Leçons tirées

- La méthode du col, c'est bien...
- ... mais seulement quand on peut l'appliquer !

Extensions possibles

- modèle avec temps de réaction r. On obtient alors

$$Q(z) = \frac{\beta z + \alpha}{e^{rz} z^2 + \delta z + \alpha}$$

- modèle non homogène $Q^N(z) \Rightarrow \prod_{i=1}^{N} Q_i(z)$

Dans ces deux cas, les raisonnements sur les propriétés de polynômes de degré $\leqslant 4$ ne suffisent plus.

Questions ?

Merci à tous pour votre attention

Merci à Guy pour tout le reste !

I Avant propos
II Mise en place du modèle
III Utilisation de la méthode du col
IV Classification en fonction de τ
V Conclusions
VI Pas le temps pour ça (bonus)

Pourquoi est-ce qu'on fait ça ?

Contexte réduction des accordéons avec des véhicules automatisés et communicants dans le trafic. Le folklore dit que 5% de véhicules automatisés est suffisant.

✓ **Modélisation du temps de réaction** important pour expliquer plus précisément les accordéons

✓ **Prédiction d'onde de trafic** permet d'anticiper quand une onde signalée par le véhicule 0 au véhicule N va arriver.

✗ **Contrôle** détermination d'une stratégie de contrôle

- le véhicule automatisé ralentit pour permettre à l'onde qui arrive de se dissiper.
- sans créer une nouvelle onde derrière lui !

✗ **Algorithme** montre comment toutes ces choses peuvent marcher ensemble.

Example : the Intelligent Driver Model (IDM)

Definition the function f is of the form

$$f(\Delta x, \Delta v, v) = a\left[1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\delta} - \left(\frac{s^*(v, \Delta v)}{\Delta x - \ell}\right)^2\right],$$

$$\text{with } s^*(v, \Delta v) = s_0 + vT - \frac{v \cdot \Delta v}{2\sqrt{a\,b}}.$$

Equilibrium relation between speed and interdistance

$$\Delta x^* = \frac{s_0 + v^* T}{\sqrt{1 - (v^*/v_0)^{\delta}}} + \ell.$$

Example : IDM (cont'd)

Parameters of the linear differential equation

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial \Delta x}(\Delta x^*, 0, v^*) = \frac{2a(s_0 + v^*T)^2}{\Delta x^{*3}},$$
$$\beta = \frac{\partial f}{\partial \Delta v}(\Delta x^*, 0, v^*) = \frac{av^*(s_0 + v^*T)}{\Delta x^{*2}\sqrt{ab}},$$
$$\gamma = -\frac{\partial f}{\partial v}(\Delta x^*, 0, v^*) = a\Big[\frac{\delta}{v^*}\Big(\frac{v^*}{v_0}\Big)^{\delta} + \frac{2T(s_0 + v^*T)}{\Delta x^{*2}}\Big].$$