

Méthode des invariants de Tutte et particules browniennes en interaction

Thomas Dreyfus¹ **Jules Flin**² Sandro Franceschi²

¹Université Bourgogne Europe
CNRS

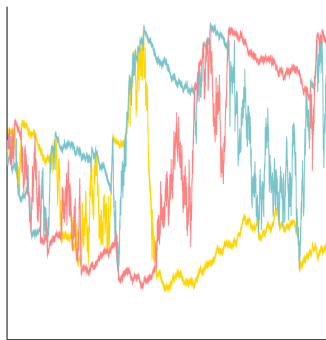
²Télécom SudParis
Institut Polytechnique de Paris

Un quart de siècle pour un quart de plan, Avril 2025

Introduction

Système de particules (browniennes) en interaction

Modèle introduit/étudié par Fernholz, Karatzas, Pal, Shkolnikov, Warren,... dans les années 2000. Les caractéristiques des particules dépendent de leurs **rangs**.

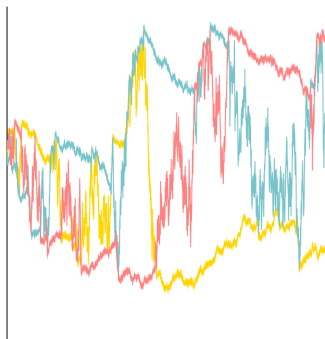


« par nom »

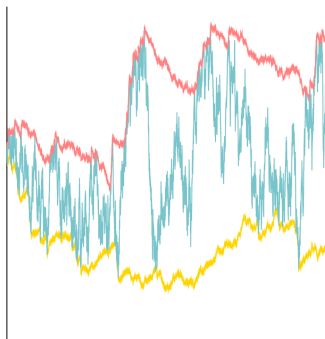
Introduction

Système de particules (browniennes) en interaction

Modèle introduit/étudié par Fernholz, Karatzas, Pal, Shkolnikov, Warren,... dans les années 2000. Les caractéristiques des particules dépendent de leurs **rangs**.



« par nom »

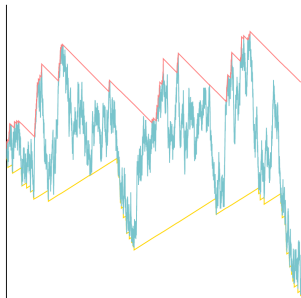


« par rang »

Introduction

Dégénérescence et collisions symétriques

- **dégénérescence** : certaines variances sont **nulles** (trajectoires *balistiques*).

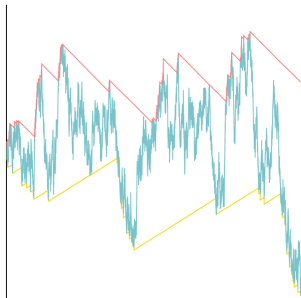


$$\begin{cases} Z_t^{(3)} &= Z_0^{(3)} + \frac{1}{2} L_t^{(2,3)} \\ Z_t^{(2)} &= Z_0^{(2)} + \sigma B_t + \frac{1}{2} L_t^{(1,2)} - \frac{1}{2} L_t^{(2,3)} \\ Z_t^{(1)} &= Z_0^{(1)} - \frac{1}{2} L_t^{(1,2)} \end{cases}$$

Introduction

Dégénérescence et collisions symétriques

- **dégénérescence** : certaines variances sont **nulles** (trajectoires *balistiques*).



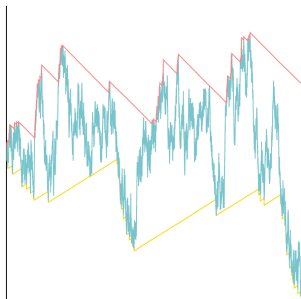
$$\begin{cases} Z_t^{(3)} &= Z_0^{(3)} + \frac{1}{2} L_t^{(2,3)} \\ Z_t^{(2)} &= Z_0^{(2)} + \sigma B_t + \frac{1}{2} L_t^{(1,2)} - \frac{1}{2} L_t^{(2,3)} \\ Z_t^{(1)} &= Z_0^{(1)} - \frac{1}{2} L_t^{(1,2)} \end{cases}$$

- collisions symétriques : partage équitable des **temps locaux** $L_t^{(i,i+1)}$.

Introduction

Dégénérescence et collisions **symétriques** **asymétriques**

- **dégénérescence** : certaines variances sont **nulles** (trajectoires *balistiques*).



$$\begin{cases} Z_t^{(3)} = Z_0^{(3)} + \lambda^- L_t^{(2,3)} \\ Z_t^{(2)} = Z_0^{(2)} + \sigma B_t + \mu^- L_t^{(1,2)} - \lambda^+ L_t^{(2,3)} \\ Z_t^{(1)} = Z_0^{(1)} - \mu^+ L_t^{(1,2)} \end{cases}$$

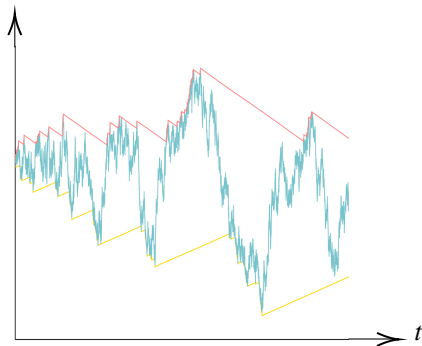
$\lambda_- + \lambda_+ = 1$

$\mu_- + \mu_+ = 1$

- collisions **symétriques** : partage équitable des **temps locaux** $L_t^{(i,i+1)}$.
asymétriques **pondéré**

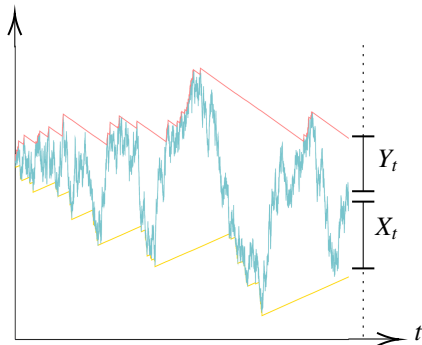
Introduction

Processus des écarts



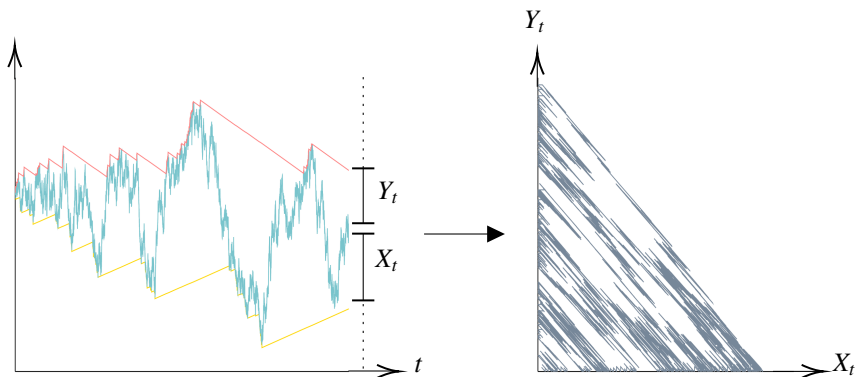
Introduction

Processus des écarts



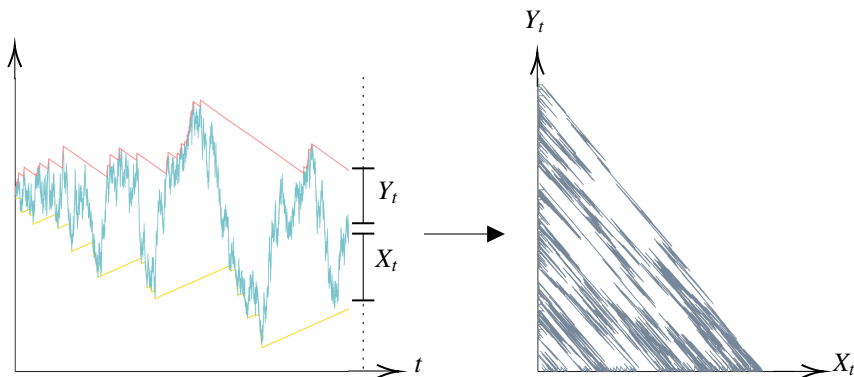
Introduction

Processus des écarts



Introduction

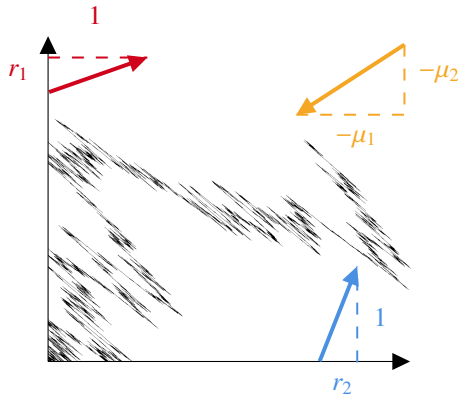
Processus des écarts



$(X_t, Y_t) := (Z_t^{(2)} - Z_t^{(1)}, Z_t^{(3)} - Z_t^{(2)}) \sim$ Brownien **dégénéré** réfléchi
obliquement dans $\mathbb{R}_+^2$

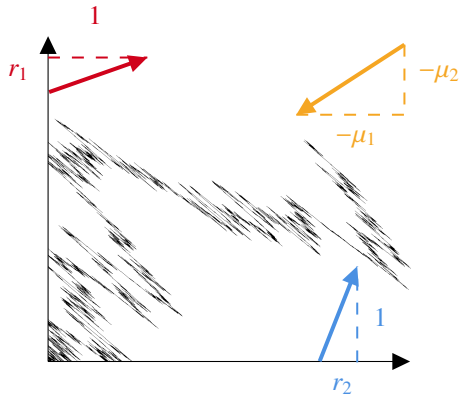
Introduction

Paramètres du modèle



Introduction

Paramètres du modèle

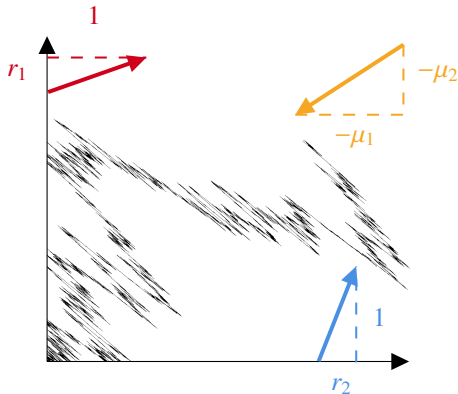


Restrictions

Drift « négatif » (sud-ouest)

Introduction

Paramètres du modèle



Restrictions

Drift « négatif » (sud-ouest)

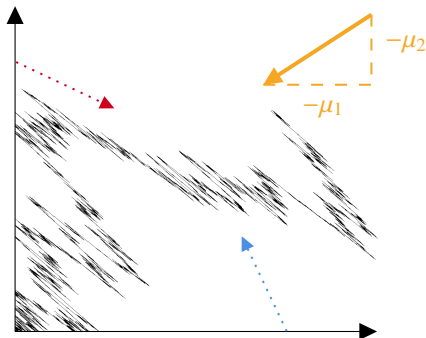
Sans perte de généralité...

- $\mu_1 + \mu_2 = 1$,
- matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \det(\Sigma) = 0$$

Introduction

Paramètres du modèle



Restrictions

Drift « négatif » (sud-ouest)

Sans perte de généralité...

- $\mu_1 + \mu_2 = 1$,
- matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \det(\Sigma) = 0$$

Remarque : collisions symétriques $\iff r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$

Introduction

Existence et récurrence (CNS)

Existence

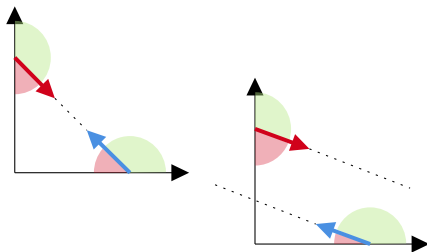
Récurrence

Introduction

Existence et récurrence (CNS)

Existence

$$1 - r_1 r_2 > 0 \text{ ou } r_1 > 0 \text{ et } r_2 > 0$$



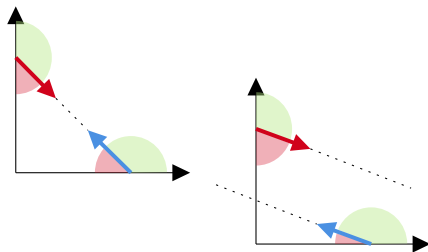
Récurrence

Introduction

Existence et récurrence (CNS)

Existence

$$1 - r_1 r_2 > 0 \text{ ou } r_1 > 0 \text{ et } r_2 > 0$$



- peut s'échapper de l'origine
- ne dépend pas du drift

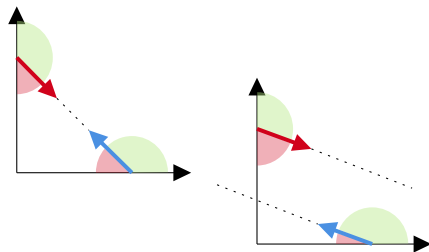
Récurrence

Introduction

Existence et récurrence (CNS)

Existence

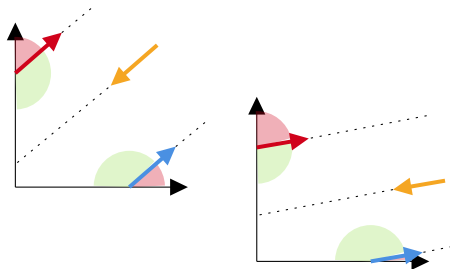
$$1 - r_1 r_2 > 0 \text{ ou } r_1 > 0 \text{ et } r_2 > 0$$



- peut s'échapper de l'origine
- ne dépend pas du drift

Récurrence

$$\mu_2 - r_1 \mu_1 > 0 \text{ et } \mu_1 - r_2 \mu_2 > 0$$

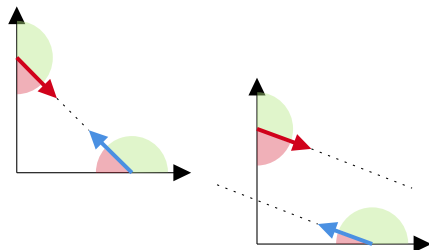


Introduction

Existence et récurrence (CNS)

Existence

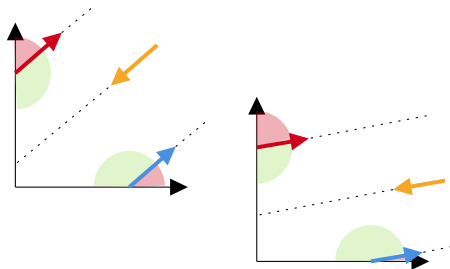
$$1 - r_1 r_2 > 0 \text{ ou } r_1 > 0 \text{ et } r_2 > 0$$



- peut s'échapper de l'origine
- ne dépend pas du drift

Récurrence

$$\mu_2 - r_1 \mu_1 > 0 \text{ et } \mu_1 - r_2 \mu_2 > 0$$



- compétition entre le drift et les réflexions

Introduction

Mesure invariante et transformée de Laplace

- π mesure invariante, $\pi(u, v)$ sa densité,

Introduction

Mesure invariante et transformée de Laplace

- π mesure invariante, $\pi(u, v)$ sa densité,
- $\phi(x, y)$, $\phi_1(y)$ et $\phi_2(x)$ les **transformées de Laplace** :

$$\phi(x, y) := \int_0^{+\infty} \pi(u, v) e^{xu+yv} du dv$$

$$\phi_1(y) := \int_0^{+\infty} \pi(0, v) e^{yv} dv, \quad \phi_2(x) := \int_0^{+\infty} \pi(u, 0) e^{xu} du$$

Introduction

Mesure invariante et transformée de Laplace

- π mesure invariante, $\pi(u, v)$ sa densité,
- $\phi(x, y)$, $\phi_1(y)$ et $\phi_2(x)$ les **transformées de Laplace** :

$$\phi(x, y) := \int_0^{+\infty} \pi(u, v) e^{xu+yv} du dv$$

$$\phi_1(y) := \int_0^{+\infty} \pi(0, v) e^{yv} dv, \quad \phi_2(x) := \int_0^{+\infty} \pi(u, 0) e^{xu} du$$

Objectif(s)

Introduction

Mesure invariante et transformée de Laplace

- π mesure invariante, $\pi(u, v)$ sa densité,
- $\phi(x, y)$, $\phi_1(y)$ et $\phi_2(x)$ les **transformées de Laplace** :

$$\phi(x, y) := \int_0^{+\infty} \pi(u, v) e^{xu+yv} du dv$$

$$\phi_1(y) := \int_0^{+\infty} \pi(0, v) e^{yv} dv, \quad \phi_2(x) := \int_0^{+\infty} \pi(u, 0) e^{xu} du$$

Objectif(s)

- Donner formules explicites pour ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ ,

Introduction

Mesure invariante et transformée de Laplace

- π mesure invariante, $\pi(u, v)$ sa densité,
- $\phi(x, y)$, $\phi_1(y)$ et $\phi_2(x)$ les **transformées de Laplace** :

$$\phi(x, y) := \int_0^{+\infty} \pi(u, v) e^{xu+yv} du dv$$

$$\phi_1(y) := \int_0^{+\infty} \pi(0, v) e^{yv} dv, \quad \phi_2(x) := \int_0^{+\infty} \pi(u, 0) e^{xu} du$$

Objectif(s)

- Donner formules explicites pour ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ ,
- Inverser les transformées de Laplace,

Introduction

Mesure invariante et transformée de Laplace

- π mesure invariante, $\pi(u, v)$ sa densité,
- $\phi(x, y)$, $\phi_1(y)$ et $\phi_2(x)$ les **transformées de Laplace** :

$$\phi(x, y) := \int_0^{+\infty} \pi(u, v) e^{xu+yv} du dv$$

$$\phi_1(y) := \int_0^{+\infty} \pi(0, v) e^{yv} dv, \quad \phi_2(x) := \int_0^{+\infty} \pi(u, 0) e^{xu} du$$

Objectif(s)

- Donner formules explicites pour ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ ,
- Inverser les transformées de Laplace,
- Déterminer leurs natures algébriques et différentielles.

Classification des transformées de Laplace

Rationnelle

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Classification des transformées de Laplace

Rationnelle

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Algébrique

$$P(x, f(x)) = 0$$

Classification des transformées de Laplace

Rationnelle

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Algébrique

$$P(x, f(x)) = 0$$

Différentiellement finie/holonome

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) f^{(k)}(x) = 0$$

Classification des transformées de Laplace

Rationnelle

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Algébrique

$$P(x, f(x)) = 0$$

Différentiellement finie/holonyme

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) f^{(k)}(x) = 0$$

Différentiellement algébrique

$$P\left(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)\right) = 0$$

Classification des transformées de Laplace

Rationnelle

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Algébrique

$$P(x, f(x)) = 0$$

Différentiellement finie/holonyme

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) f^{(k)}(x) = 0$$

Différentiellement algébrique

$$P\left(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)\right) = 0$$

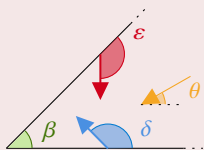
Différentiellement transcendant

Résultats antérieurs : cas **non-dégénérés**

Théorème : (Bousquet-Mélou, Elvey Price, Franceschi, Hardouin, Raschel, '22)

Dans le cas **non-dégénéré**, la nature algébrique/différentielle de ϕ est caractérisée par α , α_1 et α_2 :

	D-algebraic	D-finite	Algebraic	Rational
$\beta/\pi \notin \mathbb{Q}$	$\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, or $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$	$\alpha \in -\mathbb{N}_0 + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, or $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} \cup \left(-\mathbb{N} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}\right)$	$\alpha \in -\mathbb{N}_0$, or $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z}$	$\alpha \in -\mathbb{N}_0$
$\beta/\pi \in \mathbb{Q}$	always	$\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, or $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$	$\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, or $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$	$\alpha \in -\mathbb{N}_0$



$$\alpha := \frac{\delta + \varepsilon - \pi}{\beta},$$

$$\alpha_1 := \frac{2\varepsilon + \theta - \beta - \pi}{\beta}, \quad \alpha_2 := \frac{2\delta - \theta - \pi}{\beta}$$

Résultats antérieurs : cas **dégénérés**

Théorème : (Ichiba, Karatzas, '21)

Dans le cas *skew-symmetric* ($r_1 = -1/2$ et $r_2 = -3/2$) : ϕ **rationnelle** et

$$\phi(x, y) \propto \frac{1}{(x+a)(y+b)}, \quad \pi(u, v) \propto \exp(-au - bv)$$

Résultats antérieurs : cas **dégénérés**

Théorème : (Ichiba, Karatzas, '21)

Dans le cas *skew-symmetric* ($r_1 = -1/2$ et $r_2 = -3/2$) : ϕ **rationnelle** et

$$\phi(x, y) \propto \frac{1}{(x+a)(y+b)}, \quad \pi(u, v) \propto \exp(-au - bv)$$

Théorème : (Franceschi, Ichiba, Karatzas, Raschel, '24)

Dans le cas *symétrique* ($r_1 = r_2 = -1/2$) : ϕ **différentiellement algébrique** et

$$\phi_1(y) \propto \frac{y(y - 2\mu_2)(y - 2\mu_1 - 2)}{\cos\left(\pi\sqrt{2y + \mu_1^2}\right) - \cos(\pi\mu_1)}$$

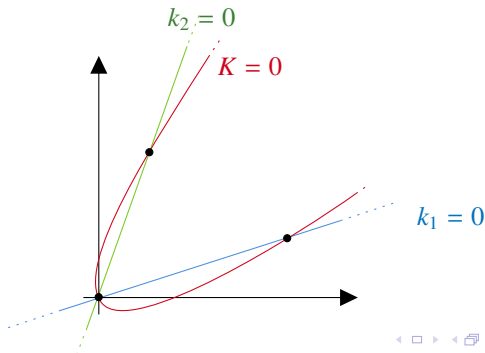
Une équation fonctionnelle

Proposition : (basic adjoint relationship)

$$-K(x, y)\phi(x, y) = k_1(x, y)\phi_1(y) + k_2(x, y)\phi_2(x)$$

où

- $K(x, y) = (x - y)^2 - 2\mu_1x - 2\mu_2y$
- $k_1(x, y) = x + r_1y$
- $k_2(x, y) = y + r_2x$



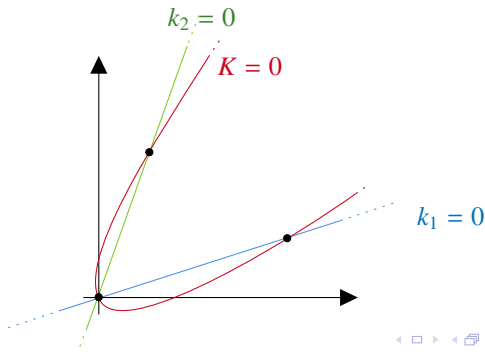
Une équation fonctionnelle

Proposition : (basic adjoint relationship)

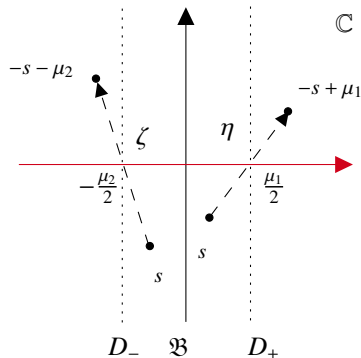
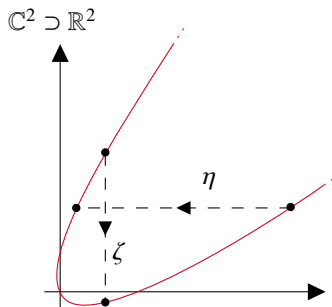
$$-K(x, y)\phi(x, y) = k_1(x, y)\phi_1(y) + k_2(x, y)\phi_2(x)$$

où

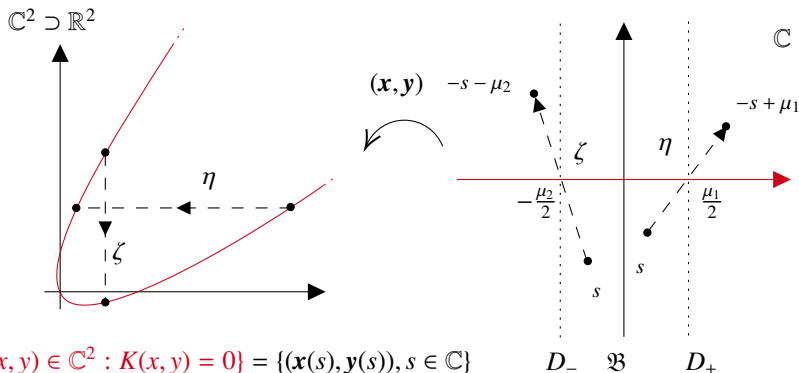
- $K(x, y) = (x - y)^2 - 2\mu_1x - 2\mu_2y$ (Noyau)
- $k_1(x, y) = x + r_1y$
- $k_2(x, y) = y + r_2x$



Uniformisation et automorphismes de Galois



Uniformisation et automorphismes de Galois

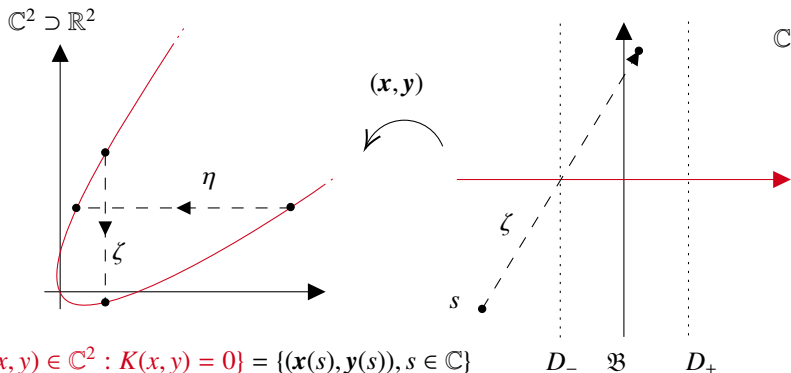


$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : K(x, y) = 0\} = \{(x(s), y(s)), s \in \mathbb{C}\}$$

● **Uniformisation** : $x(s) = 2s(s + \mu_2)$ et $y(s) = 2s(s - \mu_1)$

$$x(\zeta s) = x(s) \text{ et } y(\eta s) = y(s)$$

Uniformisation et automorphismes de Galois



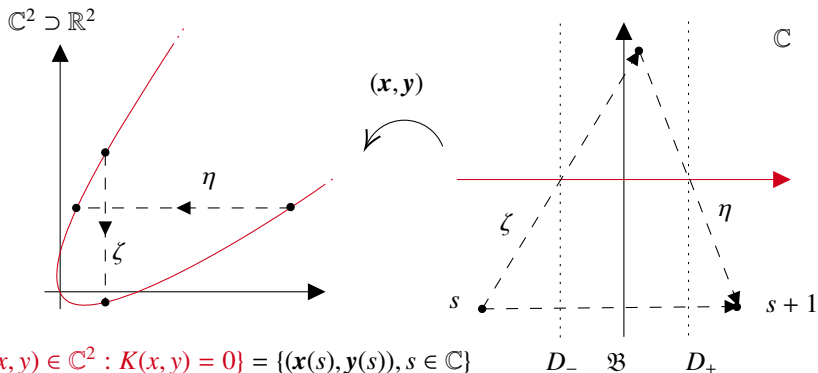
$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : K(x, y) = 0\} = \{(x(s), y(s)), s \in \mathbb{C}\}$$

- **Uniformisation** : $x(s) = 2s(s + \mu_2)$ et $y(s) = 2s(s - \mu_1)$

$$x(\zeta s) = x(s) \text{ et } y(\eta s) = y(s)$$

- **Composition des automorphismes** : $\zeta(s)$

Uniformisation et automorphismes de Galois



$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : K(x, y) = 0\} = \{(x(s), y(s)), s \in \mathbb{C}\}$$

- **Uniformisation** : $x(s) = 2s(s + \mu_2)$ et $y(s) = 2s(s - \mu_1)$

$$x(\zeta s) = x(s) \text{ et } y(\eta s) = y(s)$$

- **Composition des automorphismes** : $\eta \circ \zeta(s) = s + 1$

Équation aux différences

Notations : $\phi_1(s) := \phi_1(\mathbf{y}(s))$, $\phi_2(s) := \phi_2(\mathbf{x}(s))$, $k_i(s) := k_i(\mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s))$

Équation aux différences

Notations : $\phi_1(s) := \phi_1(\mathbf{y}(s))$, $\phi_2(s) := \phi_2(\mathbf{x}(s))$, $k_i(s) := k_i(\mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s)) \propto s(s - s_i)$

Équation aux différences

Notations : $\phi_1(s) := \phi_1(\mathbf{y}(s))$, $\phi_2(s) := \phi_2(\mathbf{x}(s))$, $k_i(s) := k_i(\mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s)) \propto s(s - s_i)$

Proposition : (prolongement à $\mathbb{C}$)

On peut prolonger $\phi_1(s)$ et $\phi_2(s)$ en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$.

Équation aux différences

Notations : $\phi_1(s) := \phi_1(y(s))$, $\phi_2(s) := \phi_2(x(s))$, $k_i(s) := k_i(x(s), y(s)) \propto s(s - s_i)$

Proposition : (prolongement à $\mathbb{C}$)

On peut prolonger $\phi_1(s)$ et $\phi_2(s)$ en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$.

On évalue l'équation fonctionnelle en $(x, y)(s)$ et $(x, y)(\zeta s)$

$$\begin{cases} 0 &= k_1(s)\phi_1(s) + k_2(s)\phi_2(s) \\ 0 &= k_1(\zeta s)\phi_1(\zeta s) + k_2(\zeta s)\phi_2(\zeta s) \end{cases}$$

Équation aux différences

Notations : $\phi_1(s) := \phi_1(y(s))$, $\phi_2(s) := \phi_2(x(s))$, $k_i(s) := k_i(x(s), y(s)) \propto s(s - s_i)$

Proposition : (prolongement à $\mathbb{C}$)

On peut prolonger $\phi_1(s)$ et $\phi_2(s)$ en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$.

On évalue l'équation fonctionnelle en $(x, y)(s)$ et $(x, y)(\zeta s)$

$$\begin{cases} 0 &= k_1(s)\phi_1(s) + k_2(s)\phi_2(s) \\ 0 &= k_1(\zeta s)\phi_1(s+1) + k_2(\zeta s)\phi_2(s) \end{cases}$$

Équation aux différences

Notations : $\phi_1(s) := \phi_1(y(s))$, $\phi_2(s) := \phi_2(x(s))$, $k_i(s) := k_i(x(s), y(s)) \propto s(s - s_i)$

Proposition : (prolongement à $\mathbb{C}$)

On peut prolonger $\phi_1(s)$ et $\phi_2(s)$ en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$.

On évalue l'équation fonctionnelle en $(x, y)(s)$ et $(x, y)(\zeta s)$

$$\begin{cases} 0 &= k_1(s)\phi_1(s) + k_2(s)\phi_2(s) \\ 0 &= k_1(\zeta s)\phi_1(s+1) + k_2(\zeta s)\phi_2(s) \end{cases}$$

En éliminant $\phi_2(s)$:

Théorème : (équation aux différences)

$$\phi_1(s+1) = G(s)\phi_1(s) \text{ où } G(s) := \frac{(s-s_1)(s-\zeta s_2)}{(s-s_2)(s-\zeta s_1)}$$

Définition : (invariant)

I méromorphe sur un voisinage de la bande $\mathfrak{B}$ telle que

$$I(\zeta s) = I(s) \text{ et } I(\eta s) = I(s)$$

Invariants de Tutte

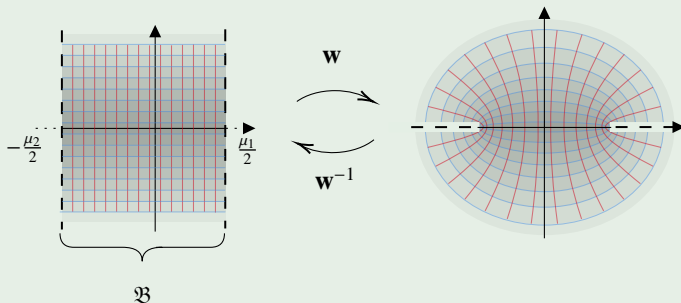
Définition : (invariant)

I méromorphe sur un voisinage de la bande $\mathfrak{B}$ telle que

$$I(\zeta s) = I(s) \text{ et } I(\eta s) = I(s)$$

Proposition : (fonction de collage conforme, invariant canonique)

$$w : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)), \quad s \mapsto \cos(2\pi(s + \mu_2/2))$$



Lemme : (invariants)

Soit I un **invariant** de Tutte. Si $I...$

- ... admet un **nombre fini de pôles** dans $\overline{\mathfrak{B}}$,
- ... **croît** au plus **polynomialement**,

alors $I = F(w)$ avec $F \in \mathbb{C}(X)$.

Lemme des invariants

Lemme : (invariants)

Soit I un **invariant** de Tutte. Si $I...$

- ... admet un **nombre fini de pôles** dans $\overline{\mathfrak{B}}$,
- ... **croît** au plus **polynomialement**,

alors $I = F(w)$ avec $F \in \mathbb{C}(X)$.

Idée de preuve. Poser $f = I \circ w^{-1}$ et appliquer le théorème de Liouville.

Lemme des invariants

Lemme : (invariants)

Soit I un **invariant** de Tutte. Si $I...$

- ... admet un **nombre fini de pôles** dans $\overline{\mathfrak{B}}$,
- ... **croît** au plus **polynomialement**,

alors $I = F(\mathbf{w})$ avec $F \in \mathbb{C}(X)$.

Idée de preuve. Poser $f = I \circ \mathbf{w}^{-1}$ et appliquer le théorème de Liouville.

Objectif : construire un invariant à partir de ϕ_1 (grâce à l'équation aux différence !)

Rappel : (équation aux différences)

$$\phi_1(s+1) = G(s) \phi_1(s) \text{ où } G(s) := \frac{(s-s_1)(s-\zeta s_2)}{(s-s_2)(s-\zeta s_1)}$$

Rappel : (équation aux différences)

$$\phi_1(s+1) = G(s) \phi_1(s) \text{ où } G(s) := \frac{(s-s_1)(s-\zeta s_2)}{(s-s_2)(s-\zeta s_1)}$$

Définition : (découplage)

Fonction rationnelle $D(s)$ telle que $G(s) = \frac{D(s)}{D(s+1)}$.

Rappel : (équation aux différences)

$$\phi_1(s+1) = G(s) \phi_1(s) \text{ où } G(s) := \frac{(s-s_1)(s-\zeta s_2)}{(s-s_2)(s-\zeta s_1)}$$

Définition : (découplage)

Fonction rationnelle $D(s)$ telle que $G(s) = \frac{D(s)}{D(s+1)}$.

Conséquence : $D\phi_1(s+1) = D\phi_1(s)$ et $D\phi_1$ est un invariant !

Rappel : (équation aux différences)

$$\phi_1(s+1) = G(s) \phi_1(s) \text{ où } G(s) := \frac{(s-s_1)(s-\zeta s_2)}{(s-s_2)(s-\zeta s_1)}$$

Définition : (découplage)

Fonction rationnelle $D(s)$ telle que $G(s) = \frac{D(s)}{D(s+1)}$.

Conséquence : $D\phi_1(s+1) = D\phi_1(s)$ et $D\phi_1$ est un invariant! 

Existence d'un découplage

Les **nouvelles quantités d'intérêt** sont

- $\gamma := s_1 - s_2 = \frac{r_1 r_2 - 1}{(1 + r_1)(1 + r_2)},$
- $\gamma_1 := s_1 - \zeta s_1 = \frac{r_1 \mu_1 - \mu_2 - 1}{1 + r_1},$
- $\gamma_2 := \zeta s_2 - s_2 - 1 = \frac{r_2 \mu_2 - \mu_1 - 1}{1 + r_2}.$

Existence d'un découplage

Les **nouvelles quantités d'intérêt** sont

- $\gamma := s_1 - s_2 = \frac{r_1 r_2 - 1}{(1 + r_1)(1 + r_2)},$
- $\gamma_1 := s_1 - \zeta s_1 = \frac{r_1 \mu_1 - \mu_2 - 1}{1 + r_1},$
- $\gamma_2 := \zeta s_2 - s_2 - 1 = \frac{r_2 \mu_2 - \mu_1 - 1}{1 + r_2}.$

Théorème : (existence d'un découplage) **CNS!**

G admet un découplage si et seulement si $\gamma \in \mathbb{Z}$ ou $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subset \mathbb{Z}$. Ce découplage est de la forme

$$D(s) = \frac{P(\mathbf{y}(s))}{Q(\mathbf{y}(s))} \left(s - \frac{\mu_1}{2} \right)^\varepsilon$$

Existence d'un découplage

Les **nouvelles quantités d'intérêt** sont

- $\gamma := s_1 - s_2 = \frac{r_1 r_2 - 1}{(1 + r_1)(1 + r_2)},$
- $\gamma_1 := s_1 - \zeta s_1 = \frac{r_1 \mu_1 - \mu_2 - 1}{1 + r_1},$
- $\gamma_2 := \zeta s_2 - s_2 - 1 = \frac{r_2 \mu_2 - \mu_1 - 1}{1 + r_2}.$

Rappel :

$$G(s) = \frac{(s - s_1)(s - \zeta s_2)}{(s - s_2)(s - \zeta s_1)}$$

Théorème : (existence d'un découplage) **CNS !**

G admet un découplage si et seulement si $\gamma \in \mathbb{Z}$ ou $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subset \mathbb{Z}$. Ce découplage est de la forme

$$D(s) = \frac{P(y(s))}{Q(y(s))} \left(s - \frac{\mu_1}{2} \right)^\varepsilon$$

Nouveaux résultats

En combinant **découplages** et **invariants de Tutte**, on obtient...

Nouveaux résultats

En combinant **découplages** et **invariants de Tutte**, on obtient...

Théorème : (Dreyfus, J.F., Franceschi, '25+)

Supposons $\gamma \in \mathbb{Z}$.

- Si $\gamma \in \mathbb{N}$, alors $\phi_1(y) \propto \frac{1}{P(y)}$ avec $\deg(P) = \gamma$
- Si $\gamma \in -\mathbb{N}$, alors $\phi_1(y) \propto \frac{Q(y)}{\cos\left(\pi\sqrt{2y + \mu_1^2}\right) - \cos(\pi\gamma_1)}$ avec $\deg(Q) = -\gamma$.

Nouveaux résultats

En combinant **découplages** et **invariants de Tutte**, on obtient...

Théorème : (Dreyfus, J.F., Franceschi, '25+)

Supposons $\gamma \in \mathbb{Z}$.

- Si $\gamma \in \mathbb{N}$, alors $\phi_1(y) \propto \frac{1}{P(y)}$ avec $\deg(P) = \gamma$
- Si $\gamma \in -\mathbb{N}$, alors $\phi_1(y) \propto \frac{Q(y)}{\cos\left(\pi\sqrt{2y + \mu_1^2}\right) - \cos(\pi\gamma_1)}$ avec $\deg(Q) = -\gamma$.

[Ichiba, Karatzas] $\iff \gamma = 1$, [Franceschi, I., K., Raschel] $\iff \gamma = -3$

Nouveaux résultats

En combinant **découplages** et **invariants de Tutte**, on obtient...

Théorème : (Dreyfus, J.F., Franceschi, '25+)

Supposons $\gamma \in \mathbb{Z}$.

- Si $\gamma \in \mathbb{N}$, alors $\phi_1(y) \propto \frac{1}{P(y)}$ avec $\deg(P) = \gamma$
- Si $\gamma \in -\mathbb{N}$, alors $\phi_1(y) \propto \frac{Q(y)}{\cos\left(\pi\sqrt{2y+\mu_1^2}\right) - \cos(\pi\gamma_1)}$ avec $\deg(Q) = -\gamma$.

[Ichiba, Karatzas] $\iff \gamma = 1$, [Franceschi, I., K., Raschel] $\iff \gamma = -3$

Supposons $\gamma \notin \mathbb{Z}$ et $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subset \mathbb{Z}$. En fonction des signes et de la parité de γ_1 et γ_2

$$\phi_1(y) \propto \frac{Q(y)}{P(y)} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2y+\mu_1^2}\right)^{\pm 1}}{\sqrt{2y+\mu_1^2}} \quad \text{ou} \quad \phi_1(y) \propto \frac{Q(y)\sqrt{2y+\mu_1^2}}{P(y)\sin\left(\pi\sqrt{2y+\mu_1^2}\right)}$$

Théorème : (Dreyfus, J.F., Franceschi, '25+)

La nature différentielle et algébrique des transformées de Laplace est donnée par

Nature de ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ	Ratio.	Alg.	D.-F.	D.-A.
CS	$\gamma \in \mathbb{N}$			$\gamma \in \mathbb{Z}$ ou $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subset \mathbb{Z}$

Théorème : (Dreyfus, J.F., Franceschi, '25+)

La nature différentielle et algébrique des transformées de Laplace est donnée par

Nature de ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ	Ratio.	Alg.	D.-F.	D.-A.
CNS	$\gamma \in \mathbb{N}$			$\gamma \in \mathbb{Z}$ ou $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subset \mathbb{Z}$

Dans tous les autres cas : **différentiellement transcendant.**

Théorème : (Dreyfus, J.F., Franceschi, '25+)

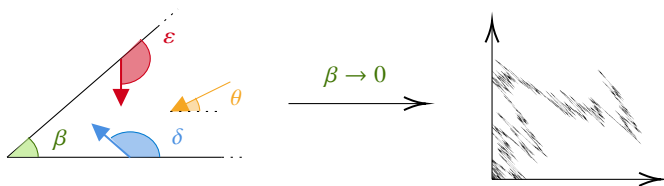
La nature différentielle et algébrique des transformées de Laplace est donnée par

Nature de ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ	Ratio.	Alg.	D.-F.	D.-A.
CNS	$\gamma \in \mathbb{N}$			$\gamma \in \mathbb{Z}$ ou $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subset \mathbb{Z}$

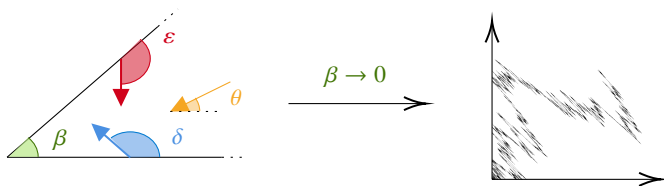
Dans tous les autres cas : **différentiellement transcendant**.

Preuve de la réciproque : théorie de Galois des équations aux différences.

Non-dégénéré $\rightarrow$ dégénéré

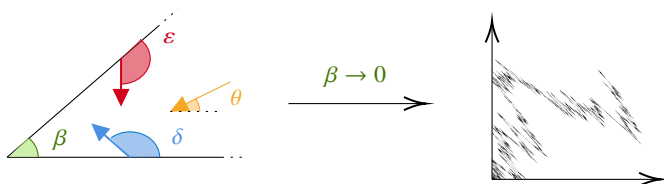


Non-dégénéré $\rightarrow$ dégénéré



$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\alpha + \frac{\pi}{\beta} \right) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\delta + \varepsilon}{\beta} = \gamma + 1$$

Non-dégénéré $\rightarrow$ dégénéré



$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\alpha + \frac{\pi}{\beta} \right) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\delta + \epsilon}{\beta} = \gamma + 1$$

Nature T.L.	Ratio.	Alg.	D.-F.	D.-A.
Non -dégénéré*	$\alpha \in -\mathbb{N}$	$\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z}$	$\{\alpha\}$ ou $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ $\subset -\mathbb{N} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$	$\alpha \in \mathbb{Z}$ ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z}$
Dégénéré	$\gamma \in \mathbb{N}$			$\gamma \in \mathbb{Z}$ ou $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subset \mathbb{Z}$

Inversion des transformées de Laplace (heuristique)

Quand les transformées de Laplace (univariées) s'écrivent

$$L(y) = F(y)Q(y)$$

où Q est un polynôme et F est la transformée de Laplace $f(v)$,

Inversion des transformées de Laplace (heuristique)

Quand les transformées de Laplace (univariées) s'écrivent

$$L(y) = F(y)Q(y)$$

où Q est un polynôme et F est la transformée de Laplace $f(v)$, on définit

$$\mathcal{Q} := Q(-\partial_v) \text{ où } \partial_v := \frac{d}{dv}$$

dont l'opérateur adjoint $\mathcal{Q}^* := Q(\partial_v)$ satisfait

$$\mathcal{Q}^* e^{yv} = Q(y) e^{yv}$$

Inversion des transformées de Laplace (heuristique)

Quand les transformées de Laplace (univariées) s'écrivent

$$L(y) = F(y)Q(y)$$

où Q est un polynôme et F est la transformée de Laplace $f(v)$, on définit

$$Q := Q(-\partial_v) \text{ où } \partial_v := \frac{d}{dv}$$

dont l'opérateur adjoint $Q^* := Q(\partial_v)$ satisfait

$$Q^* e^{yv} = Q(y) e^{yv}$$

de sorte que

$$L(y) = Q(y) \int_0^\infty f(v) e^{yv} dv$$

Inversion des transformées de Laplace (heuristique)

Quand les transformées de Laplace (univariées) s'écrivent

$$L(y) = F(y)Q(y)$$

où Q est un polynôme et F est la transformée de Laplace $f(v)$, on définit

$$Q := Q(-\partial_v) \text{ où } \partial_v := \frac{d}{dv}$$

dont l'opérateur adjoint $Q^* := Q(\partial_v)$ satisfait

$$Q^* e^{yv} = Q(y) e^{yv}$$

de sorte que

$$L(y) = Q(y) \int_0^\infty f(v) e^{yv} dv = \int_0^{+\infty} f(v) Q^* e^{yv} dv$$

Inversion des transformées de Laplace (heuristique)

Quand les transformées de Laplace (univariées) s'écrivent

$$L(y) = F(y)Q(y)$$

où Q est un polynôme et F est la transformée de Laplace $f(v)$, on définit

$$Q := Q(-\partial_v) \text{ où } \partial_v := \frac{d}{dv}$$

dont l'opérateur adjoint $Q^* := Q(\partial_v)$ satisfait

$$Q^* e^{yv} = Q(y) e^{yv}$$

de sorte que

$$L(y) = Q(y) \int_0^\infty f(v) e^{yv} dv = \int_0^{+\infty} f(v) Q^* e^{yv} dv = \int_0^{+\infty} e^{yv} Q f(v) dv.$$

Inversion des transformées de Laplace (heuristique)

Quand les transformées de Laplace (univariées) s'écrivent

$$L(y) = F(y)Q(y)$$

où Q est un polynôme et F est la transformée de Laplace $f(v)$, on définit

$$Q := Q(-\partial_v) \text{ où } \partial_v := \frac{d}{dv}$$

dont l'opérateur adjoint $Q^* := Q(\partial_v)$ satisfait

$$Q^* e^{yv} = Q(y) e^{yv}$$

de sorte que

$$L(y) = Q(y) \int_0^\infty f(v) e^{yv} dv = \int_0^{+\infty} f(v) Q^* e^{yv} dv = \int_0^{+\infty} e^{yv} Q f(v) dv.$$

$$\Rightarrow L = \mathcal{L}\{Qf(v)\}.$$

Inversion des transformées de Laplace (heuristique)

Quand les transformées de Laplace (univariées) s'écrivent

$$L(y) = F(y)Q(y)$$

où Q est un polynôme et F est la transformée de Laplace $f(v)$, on définit

$$Q := Q(-\partial_v) \text{ où } \partial_v := \frac{d}{dv}$$

dont l'opérateur adjoint $Q^* := Q(\partial_v)$ satisfait

$$Q^* e^{yv} = Q(y) e^{yv}$$

de sorte que

$$L(y) = Q(y) \int_0^\infty f(v) e^{yv} dv = \int_0^{+\infty} f(v) Q^* e^{yv} dv = \int_0^{+\infty} e^{yv} Q f(v) dv.$$

$\Rightarrow L = \mathcal{L}\{Qf(v)\}$. Généraliser à Q fraction rationnelle !

-  Bousquet-Mélou, Elvey Price, Franceschi, Hardouin, Raschel (2025). *The stationary distribution of reflected Brownian motion in a wedge : differential properties*. Electronic Journal of Probability.
-  Fernholz, Ichiba, Karatzas (2013). *Two Brownian particles with rank-based characteristics and skew-elastic collisions*. Stochastic Processes And Their Applications.
-  Franceschi, Ichiba, Karatzas, Raschel (2024). *Invariant measure of gaps in degenerate competing three-particle systems*. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques.
-  Ichiba, Karatzas (2021). *Degenerate Competing Three-Particle Systems*. Bernoulli.
-  Tutte (1973). *Chromatic sums for rooted planar triangulations*. Canad. J. Math.

Merci de votre attention !