Frontière de Martin d'un mouvement Brownien réfléchi dégénéré dans un quadrant

Une approche par compensation

Maxence Petit, encadré par Irina Kourkova et Sandro Franceschi

Sommaire

I. Brownien réfléchi dégénéré (DRBM)

II. Problème frontière et fonction harmonique

A. Exemples pour des processus simples

B. Méthode par compensation

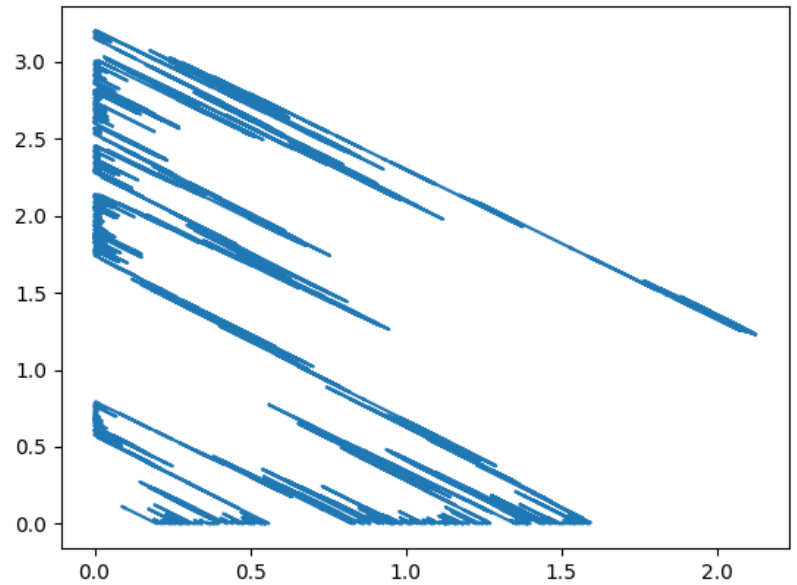
III. Lien avec la frontière de Martin et l'asymptotique des fonctions de Green

Motivation : système de particules

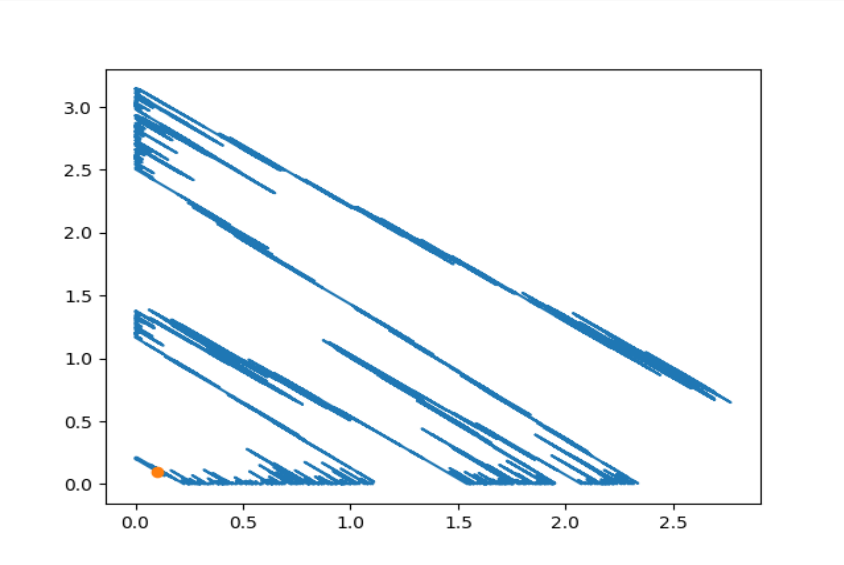
[Ichiba, Karatzas 2021] Collision entre $X_1 \leq X_2 \leq X_3$ où

- Une particule Brownienne X_2 driftée
- Des particules "ballistiques" X_1, X_3.

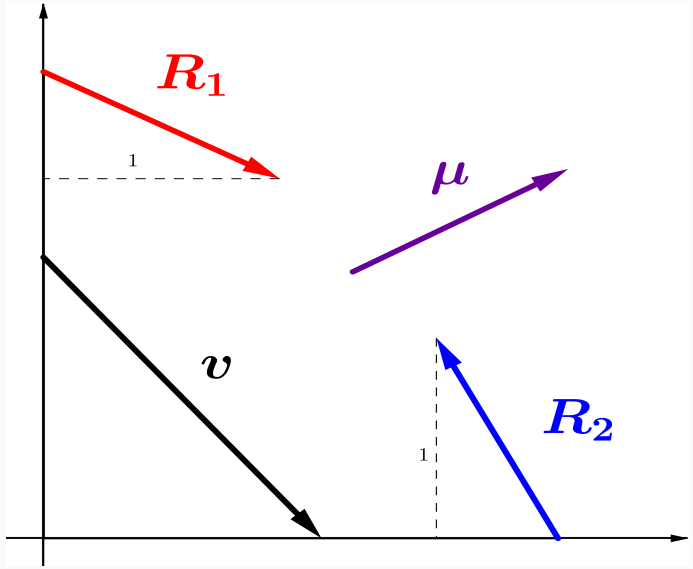
Le '**Gap process**' $(X_3 - X_2, X_2 - X_1)$ est un Brownien réfléchi **dégénéré**



Le mouvement Brownien réfléchi dégénéré $(Z_t)_{t\geq 0}$

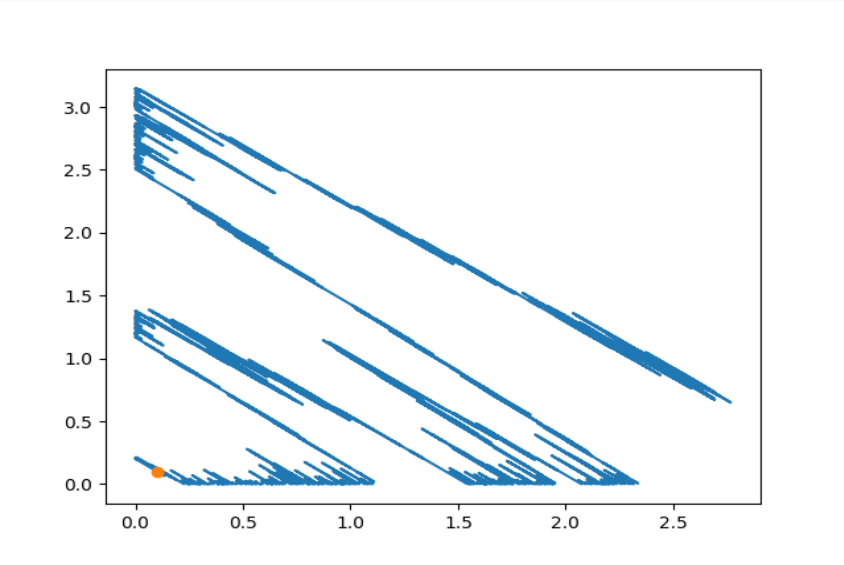


(a) Exemple de trajectoire

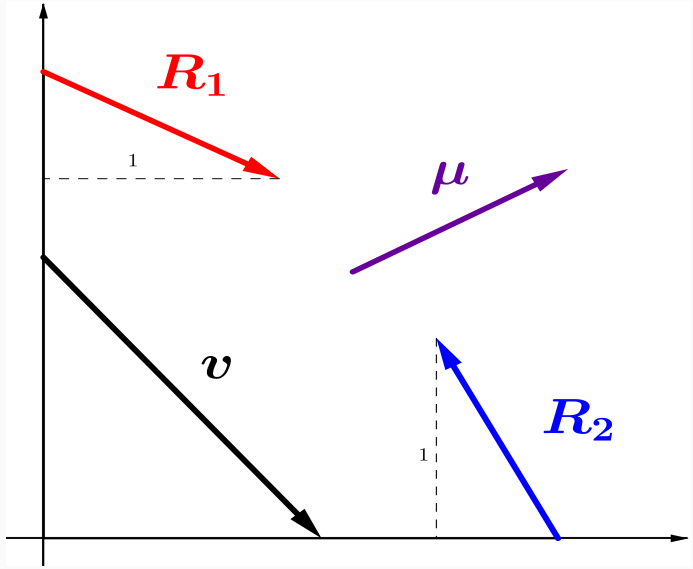


(b) Paramètres du DRBM

Le mouvement Brownien réfléchi dégénéré $(Z_t)_{t\geq 0}$



(a) Exemple de trajectoire

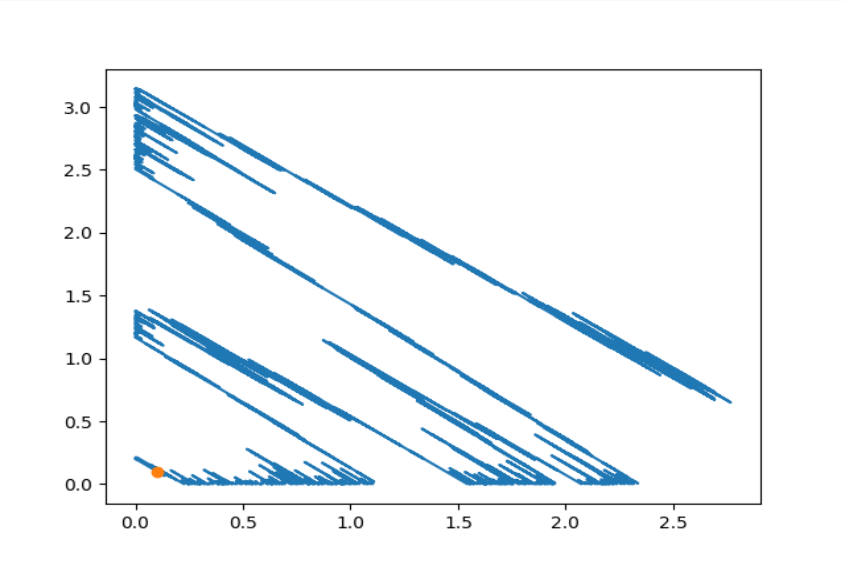


(b) Paramètres du DRBM

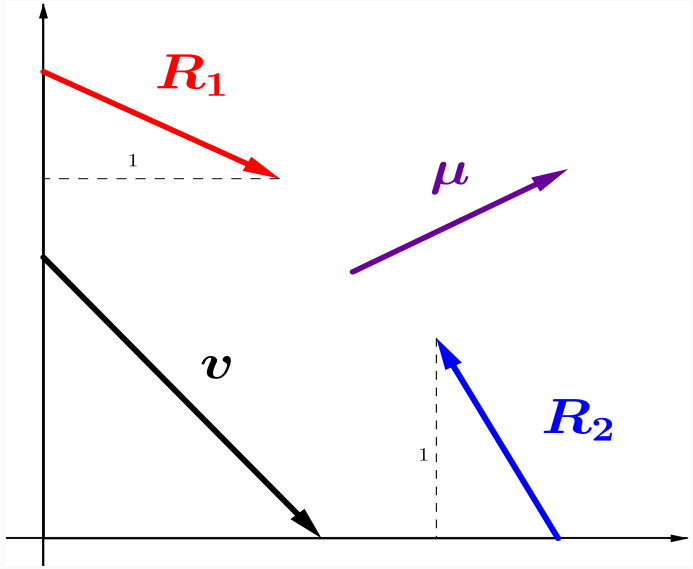
Défini par le problème de **Skorokhod** $Z_t = z_0 + vB_t + \mu t + RL_t$ où

- $(B_t)_{t\geq 0}$ est un Brownien **1D** et $v = (v_1, v_2)$ la direction

Le mouvement Brownien réfléchi dégénéré $(Z_t)_{t\geq 0}$



(a) Exemple de trajectoire

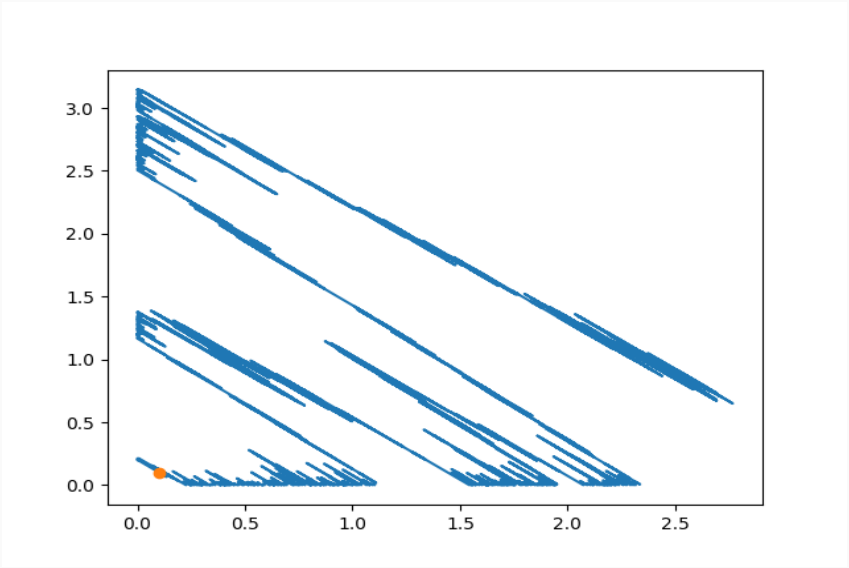


(b) Paramètres du DRBM

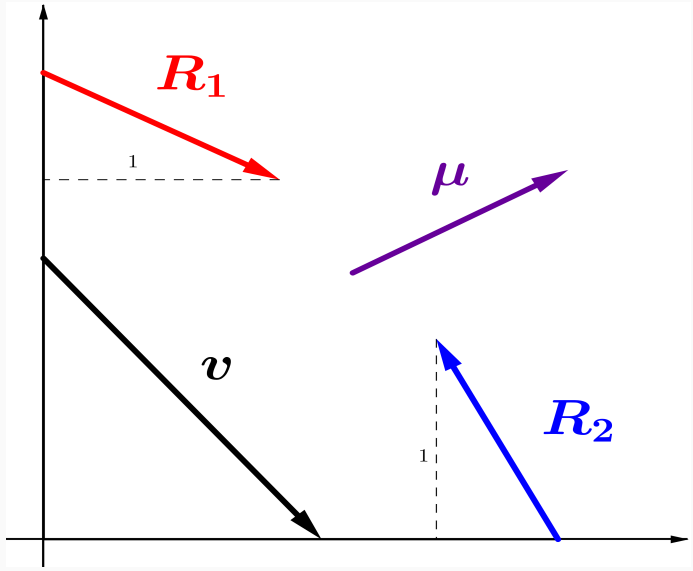
Défini par le problème de **Skorokhod** $Z_t = z_0 + vB_t + \mu t + RL_t$ où

- $(B_t)_{t\geq 0}$ est un Brownien **1D** et $v = (v_1, v_2)$ la direction
- $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ est le drift.

Le mouvement Brownien réfléchi dégénéré $(Z_t)_{t\geq 0}$



(a) Exemple de trajectoire



(b) Paramètres du DRBM

Défini par le problème de **Skorokhod** $Z_t = z_0 + vB_t + \mu t + RL_t$ où

- $(B_t)_{t\geq 0}$ est un Brownien **1D** et $v = (v_1, v_2)$ la direction
- $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ est le drift.
- $(L_t^1, L_t^2)_{t\geq 0}$ sont les temps locaux sur les axes
- $R = (R_1, R_2) = \begin{pmatrix} 1 & r_2 \\ r_1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de reflexion.

Hypothèse, objectifs

Hypothèse

$\mu_1, \mu_2 > 0$: processus de Markov **transient**

Hypothèse, objectifs

Hypothèse

$\mu_1, \mu_2 > 0$: processus de Markov **transient**

Motivation/buts

- Trouver les fonctions **harmoniques** positives h, i.e.

$$\mathcal{G}h = 0 \quad + \quad \text{conditions de } \textbf{Neumann}$$

avec $\mathcal{G} = \frac{1}{2}(\partial_x - \partial_y)^2 + \mu_1 \partial_x + \mu_2 \partial_y$.

- Trouver la **frontière de Martin** du processus

Hypothèse, objectifs

Hypothèse

$\mu_1, \mu_2 > 0$: processus de Markov **transient**

Motivation/buts

- Trouver les fonctions **harmoniques** positives h, i.e.

$$\mathcal{G}h = 0 \quad + \quad \text{conditions de } \textbf{Neumann}$$

avec $\mathcal{G} = \frac{1}{2}(\partial_x - \partial_y)^2 + \mu_1 \partial_x + \mu_2 \partial_y$.

- Trouver la **frontière de Martin** du processus

Méthode :

- Méthode par **compensation** ([Adan, Wessels, Zijm 90'], [Hoang, Raschel, Tarrago, 2022])
- **Méthodes analytiques** [Fayolle, Iasnogorodski, Malyshev].

Sommaire

I. Brownien réfléchi dégénéré (DRBM)

II. Problème frontière et fonction harmonique

A. Exemples pour des processus simples

B. Méthode par compensation

III. Lien avec la frontière de Martin et l'asymptotique des fonctions de Green

Sommaire

I. Brownien réfléchi dégénéré (DRBM)

II. Problème frontière et fonction harmonique

A. Exemples pour des processus simples

B. Méthode par compensation

III. Lien avec la frontière de Martin et l'asymptotique des fonctions de Green

Un exemple élémentaire

Proposition

Soit $(\mathbf{X_t})_{\mathbf{t\geq 0}} = (\mathbf{B_t} + \mu\mathbf{t})_{\mathbf{t\geq 0}}$ où B est un Brownien standard $2D$ et $\mu \in \mathbb{R}^2, \mu \neq 0$. Une fonction $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ est harmonique pour Z ssi

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\Delta} + \mu \cdot \nabla\right)\mathbf{h} = \mathbf{0}$$

Un exemple élémentaire

Proposition

Soit $(\mathbf{X_t})_{\mathbf{t\geq 0}} = (\mathbf{B_t} + \mu\mathbf{t})_{\mathbf{t\geq 0}}$ où B est un Brownien standard $2D$ et $\mu \in \mathbb{R}^2, \mu \neq 0$. Une fonction $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ est harmonique pour Z ssi

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{\Delta} + \mu \cdot \nabla\right)\mathbf{h} = \mathbf{0}$$

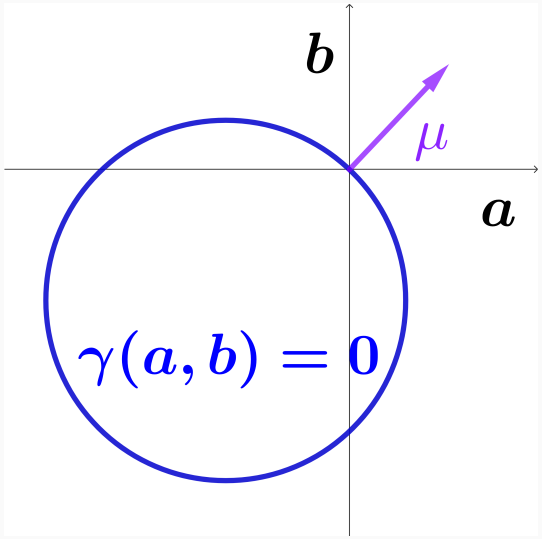
Exemple :

Si $h(x, y) = e^{ax+by}$, on a

$$\left(\frac{1}{2}\Delta + \mu \cdot \nabla\right) h = \gamma(a, b)e^{ax+by}$$

où $\gamma(a, b) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \mu_1 a + \mu_2 b$

donc $\mathbf{h}$ **est harmonique ssi** $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.



Pour un Brownien dégénéré

Proposition

Soit $(\mathbf{Z_t})_{\mathbf{t\geq 0}} = (\mathbf{vB_t} + \mu\mathbf{t})_{\mathbf{t\geq 0}} \in \mathbb{R}^2$ où B est un Brownien standard $1D$, $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$ et $\mu \in \mathbb{R}^2, \mu \neq 0$. Une fonction $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ est harmonique pour X ssi

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\partial_{\mathbf{v}}^{\mathbf{2}} + \mu \cdot \nabla\right)\mathbf{h} = \mathbf{0}$$

Pour un Brownien dégénéré

Proposition

Soit $(\mathbf{Z_t})_{\mathbf{t\geq 0}} = (\mathbf{vB_t} + \mu\mathbf{t})_{\mathbf{t\geq 0}} \in \mathbb{R}^2$ où B est un Brownien standard $1D$, $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$ et $\mu \in \mathbb{R}^2, \mu \neq 0$. Une fonction $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ est harmonique pour X ssi

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\partial_{\mathbf{v}}^{\mathbf{2}} + \mu \cdot \nabla\right)\mathbf{h} = \mathbf{0}$$

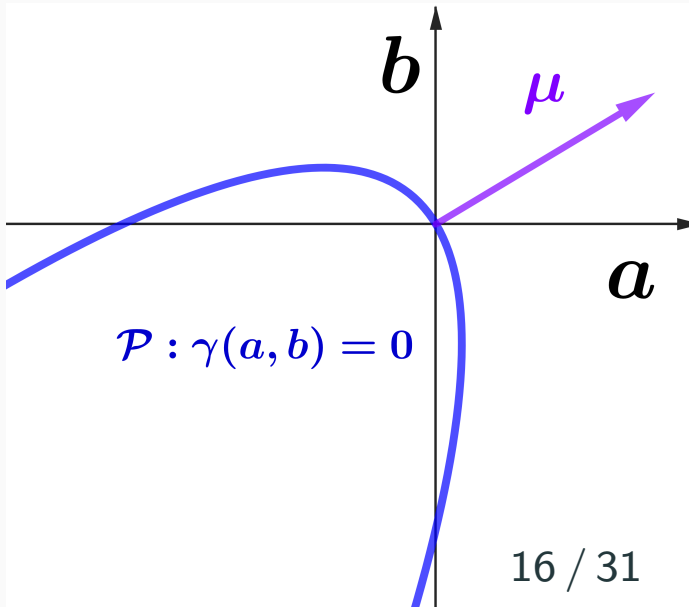
Exemple :

Si $h(x, y) = e^{ax+by}$, on a

$$\left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) h = \gamma(a, b)e^{ax+by}$$

où $\gamma(a, b) = \frac{1}{2}(av_1 + bv_2)^2 + \mu_1 a + \mu_2 b$

donc $\mathbf{h}$ **est harmonique ssi** $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.



Sommaire

I. Brownien réfléchi dégénéré (DRBM)

II. Problème frontière et fonction harmonique

A. Exemples pour des processus simples

B. Méthode par compensation

III. Lien avec la frontière de Martin et l'asymptotique des fonctions de Green

Proposition

Toute fonction h solution du problème frontière suivant est harmonique pour $\mathbf{Z_t = z_0 + vB_t + \mu t + R_1 L_t^1 + R_2 L_t^2}$

$$\begin{cases} (H_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu\nabla\right) h = 0 \qquad \text{on} \quad (0,+\infty)^2 \\ (H_1) & \partial_{R_1} h(0,y) = 0, \quad y \geq 0 \\ (H_2) & \partial_{R_2} h(x,0) = 0, \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Démonstration.
Formule d'Ito (semi-martingale). □

Proposition

Toute fonction h solution du problème frontière suivant est harmonique pour $\mathbf{Z_t = z_0 + vB_t + \mu t + R_1 L_t^1 + R_2 L_t^2}$

$$\begin{cases} (H_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu\nabla\right) h = 0 \qquad \text{on} \quad (0,+\infty)^2 \\ (H_1) & \partial_{R_1} h(0,y) = 0, \quad y \geq 0 \\ (H_2) & \partial_{R_2} h(x,0) = 0, \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Démonstration.
Formule d'Ito (semi-martingale). □

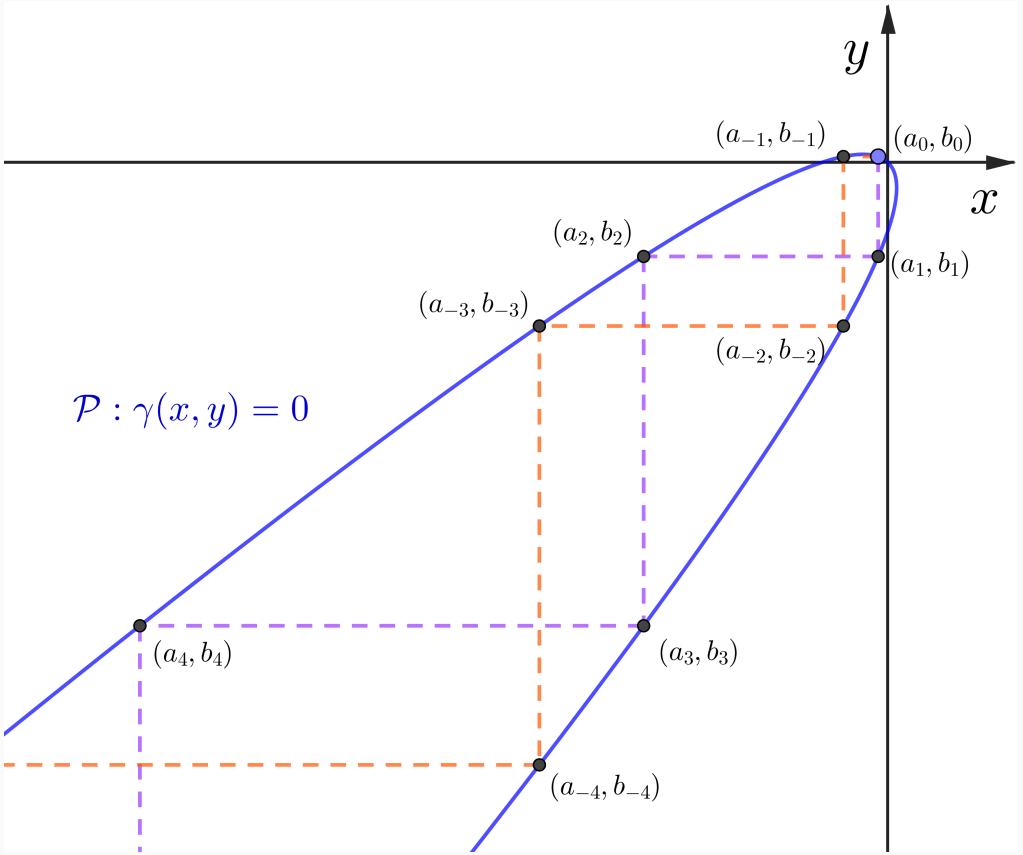
Remarque

$\gamma(a,b) = 0 \iff (a,b) \in \mathcal{P} \iff e^{ax+by} \in (H_0)$

Méthode par compensation

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (H_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu\nabla\right) h = 0 \\ (H_1) & \partial_{R_1} h(0,y) = 0, \quad y \geq 0 \\ (H_2) & \partial_{R_2} h(x,0) = 0, \quad x \geq 0 \end{cases}$$



$$h(x,y) = \overbrace{\ldots + \underbrace{c_{-1}e^{a_{-1}x+b_{-1}y}}_{\in(H_1)}}^{\in(H_2)} + \overbrace{\underbrace{c_0 e^{a_0 x+b_0 y}}_{\in(H_1)} + \underbrace{c_1 e^{a_1 x+b_1 y}}_{\in(H_1)}}^{\in(H_2)} + c_2 e^{a_2 x+b_2 y} + \ldots$$

Méthode par compensation

Theorème :

Pour tout $(a_0, b_0) \in \mathcal{P}$, $h(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{a_n x + b_n y}$ est harmonique.

Remarque

Soit $\gamma_1(a,b) = a + r_1 b, \quad \gamma_2(a,b) = r_2 a + b$. Alors

$$c_n = \begin{cases} (-1)^n \left[\prod_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor -1} \frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(a_{2k+1},b_{2k+1})}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(a_{2k+2},b_{2k+2})}\right] \frac{\gamma_2(a_0,b_0)}{\gamma_2(a_n,b_n)} & \text{if } n>0 \\ (-1)^n \left[\prod_{k=0}^{\lfloor \frac{-n}{2}\rfloor -1} \frac{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}(a_{-2k-1},b_{-2k-1})}{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}(a_{-2k-2},b_{-2k-2})}\right] \frac{\gamma_1(a_0,b_0)}{\gamma_1(a_n,b_n)} & \text{if } n<0 \end{cases}$$

$$\underset{|n|\to+\infty}{\sim} (-1)^n c_\pm n^{-2\left(\frac{1}{1+r_1}+\frac{1}{1+r_2}\right)}.$$

Méthode par compensation

Theorème :

Pour tout $(a_0, b_0) \in \mathcal{P}$, $h(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{a_n x + b_n y}$ est harmonique.

Remarque

Soit $\gamma_1(a,b) = a + r_1 b, \quad \gamma_2(a,b) = r_2 a + b$. Alors

$$c_n = \begin{cases} (-1)^n \left[\prod_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor -1} \frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(a_{2k+1},b_{2k+1})}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(a_{2k+2},b_{2k+2})}\right] \frac{\gamma_2(a_0,b_0)}{\gamma_2(a_n,b_n)} & \text{if } n>0 \\ (-1)^n \left[\prod_{k=0}^{\lfloor \frac{-n}{2}\rfloor -1} \frac{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}(a_{-2k-1},b_{-2k-1})}{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}(a_{-2k-2},b_{-2k-2})}\right] \frac{\gamma_1(a_0,b_0)}{\gamma_1(a_n,b_n)} & \text{if } n<0 \end{cases}$$

$$\underset{|n|\to+\infty}{\sim} (-1)^n c_\pm n^{-2\left(\frac{1}{1+r_1}+\frac{1}{1+r_2}\right)}.$$

Questions :

- Les fonctions harmoniques sont elles **positives ?**
- Si oui, est ce qu'on les a **toutes ?**

Sommaire

I. Brownien réfléchi dégénéré (DRBM)

II. Problème frontière et fonction harmonique

A. Exemples pour des processus simples

B. Méthode par compensation

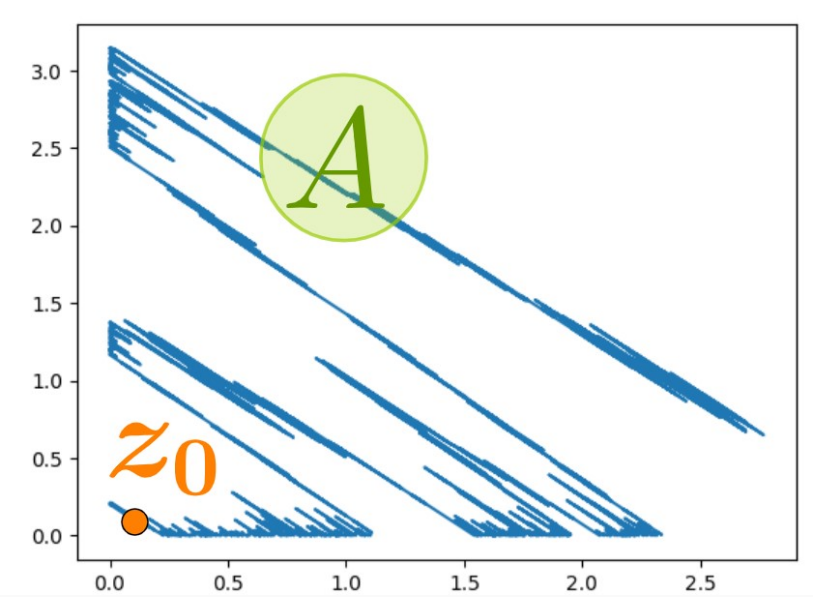
III. Lien avec la frontière de Martin et l'asymptotique des fonctions de Green

Fonctions de Green

Definition : Fonction de Green, mesure de Green

Il existe $g(z_0, \cdot)$ qui soit la densité de la mesure de Green :

$$G(z_0, A) = \mathbb{E}_{z_0}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_A(Z_t)dt\right] = \iint_A g(z_0, z)dz.$$



Remarque :

$g(\cdot, z)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2_+ \setminus \{z\}$

Asymptotique des fonctions de Green

Definition : Transformées de Laplace

$$\varphi(x,y) := \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{ux+vy} g(u,v)\,du\,dv$$

$$\varphi_1(y) := \mathbb{E}_{z_0}\left[\int_0^\infty e^{(0,y)\cdot Z_t}\, dL_t^1\right], \quad \varphi_2(x) := \mathbb{E}_{z_0}\left[\int_0^\infty e^{(x,0)\cdot Z_t}\, dL_t^2\right]$$

Pour x, y dans la zone de convergence,

$$-\gamma(x,y)\varphi(x,y) = \gamma_1(x,y)\varphi_1(y) + \gamma_2(x,y)\varphi_2(x) + e^{(x,y)\cdot z_0}$$

avec $\gamma(x,y) = \frac{1}{2}(x-y)^2 + \mu_1 x + \mu_2 y$.

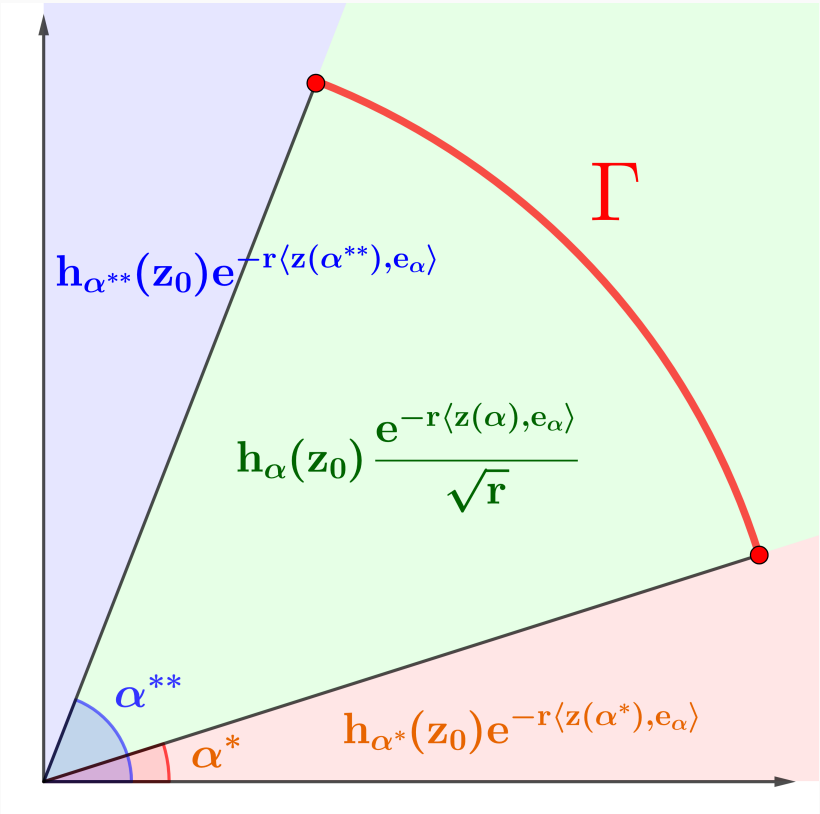
- **Inversion** de Laplace
- **Prolongement** sur $\{\gamma(x,y) = 0\}$.
- Méthode de **point col**

Lien entre fonctions de Green et fonctions harmoniques

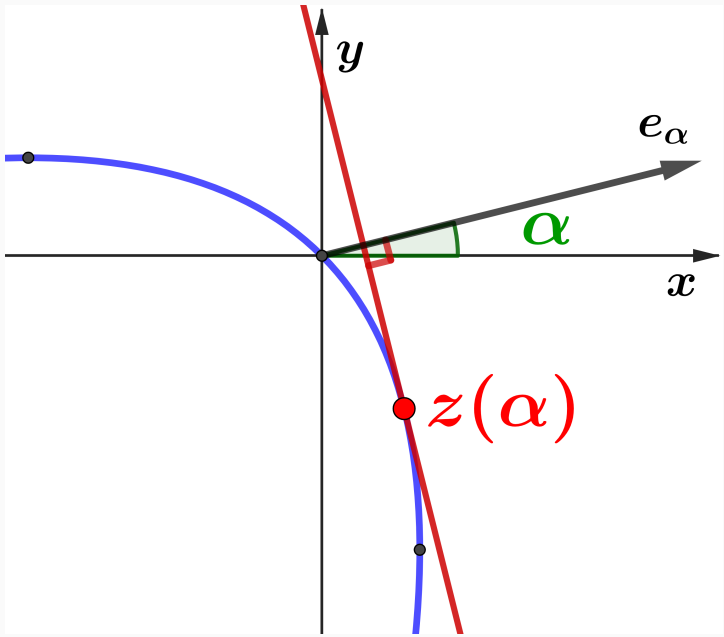
Theorème : Asymptotique des fonctions de Green

On a $$g(z_0, re^{i\omega}) \underset{\substack{\omega\to\alpha \\ r\to+\infty}}{\sim} h_{\tilde{\alpha}}(z_0) r^{-\varepsilon} e^{\langle z(\tilde{\alpha}), e_\alpha\rangle}$$

où $\varepsilon \in \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ et $\tilde{\alpha} = \max(\alpha^*, \min(\alpha, \alpha^{**}))$.



(a) Asymptotiques de $g(z_0, re^{i\omega})$



(b) Parametrisation $(a_0, b_0) = z(\alpha)$.

Frontière de Martin et fonctions harmoniques positives

Theorème : Frontière de Martin Γ et représentation

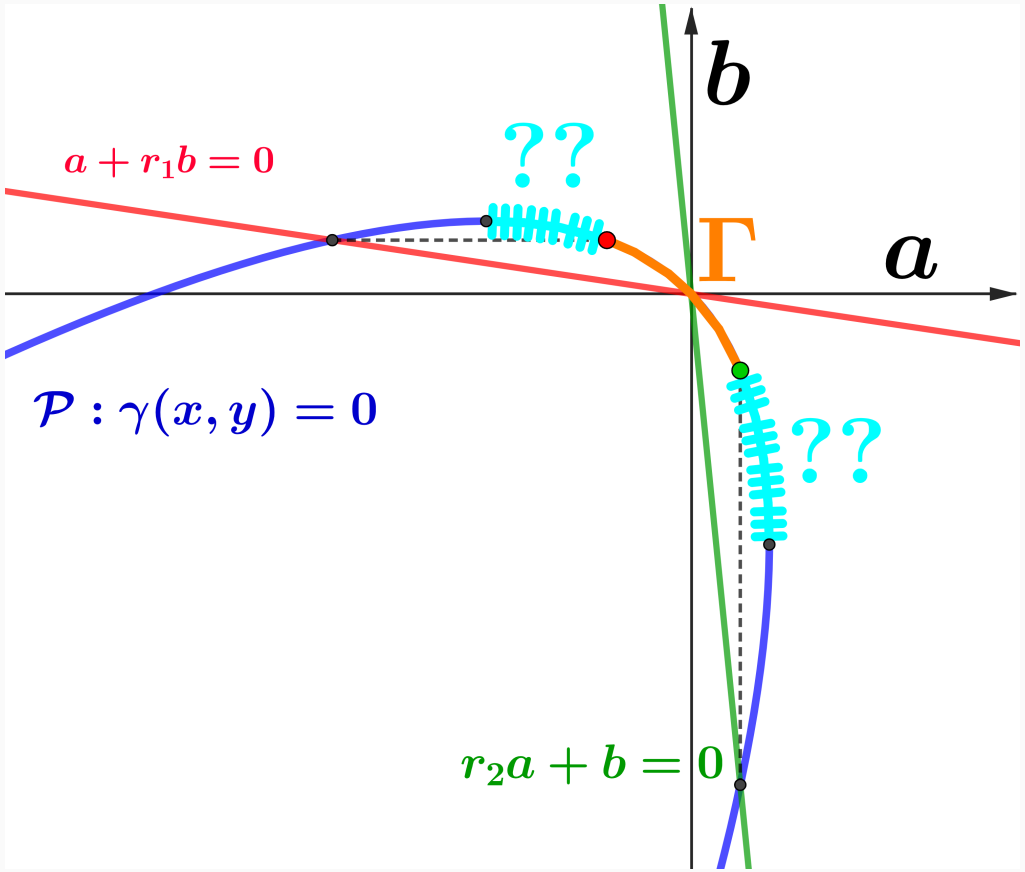
On a $\mathbf{\Gamma} = [\alpha^*, \alpha^{**}]$, et Γ est **minimale**. De plus, toute fonction harmonique **positive** h s'écrit de manière **unique** sous la forme

$$h(z) = \int_{\Gamma} h_\alpha(z) d\mu(\alpha).$$

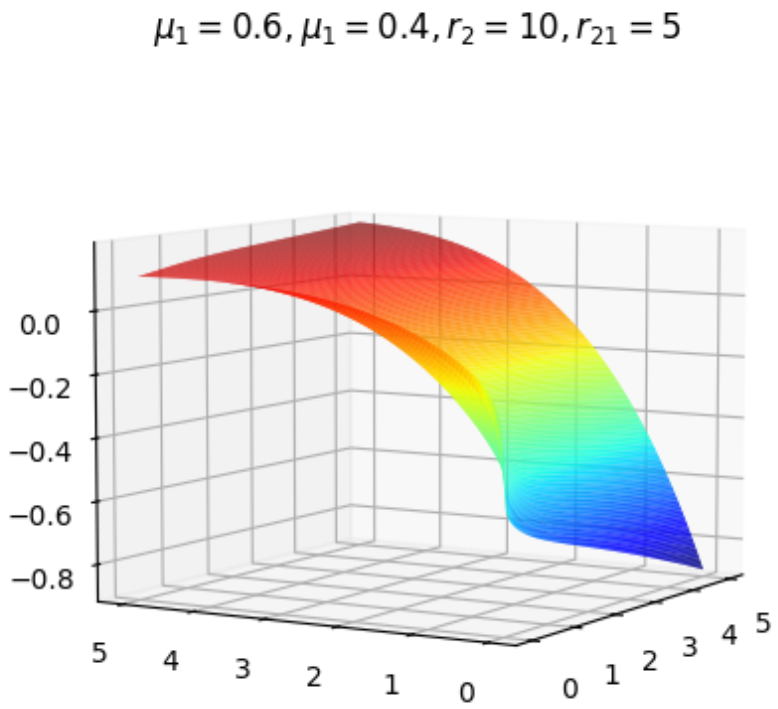
Theorème : Frontière de Martin Γ et représentation

On a $\mathbf{\Gamma} = [\alpha^*, \alpha^{**}]$, et Γ est **minimale**. De plus, toute fonction harmonique **positive** h s'écrit de manière **unique** sous la forme

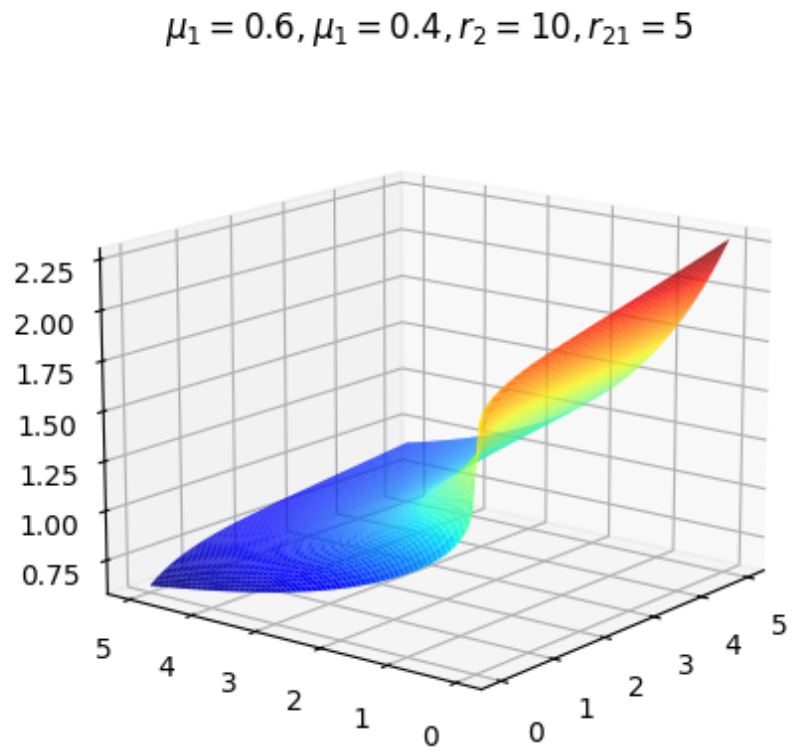
$$h(z) = \int_{\Gamma} h_\alpha(z) d\mu(\alpha).$$



Remarque sur les h_α, $\alpha \notin \Gamma$



(a) Cas $\alpha \notin \Gamma$



(b) Cas $\alpha \in \Gamma$

Merci pour votre attention !

Joyeux anniversaire Paul ! ! !