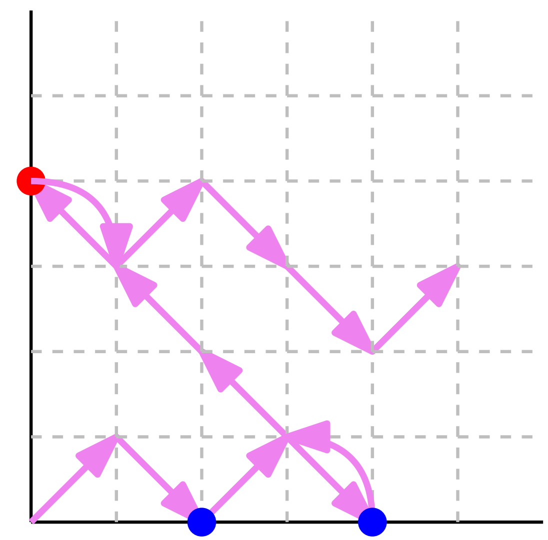
# Classification des marches à bords interactifs dans le quart de plan : le genre 0

**Pierre Bonnet**

**LaBRI**



**Un quart de siècle pour un quart de plan**

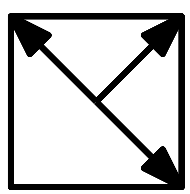
# 1. Marches à bords interactifs

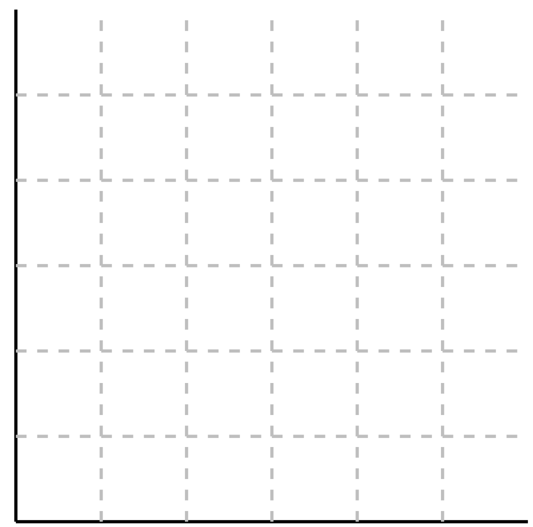
# Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

# Marches dans le quart de plan

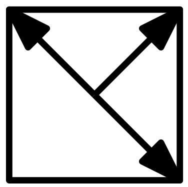
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

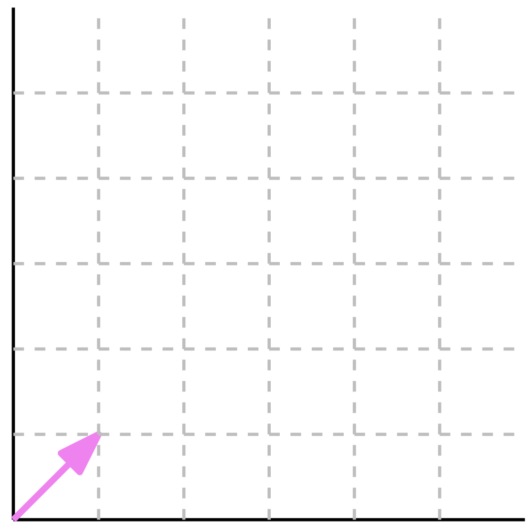
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

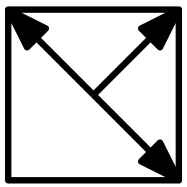
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

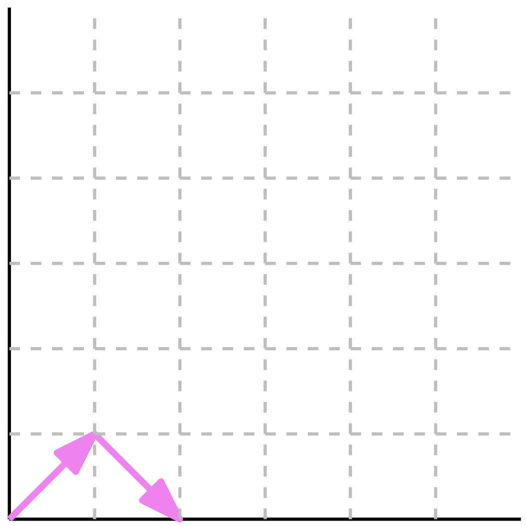
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

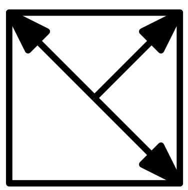
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

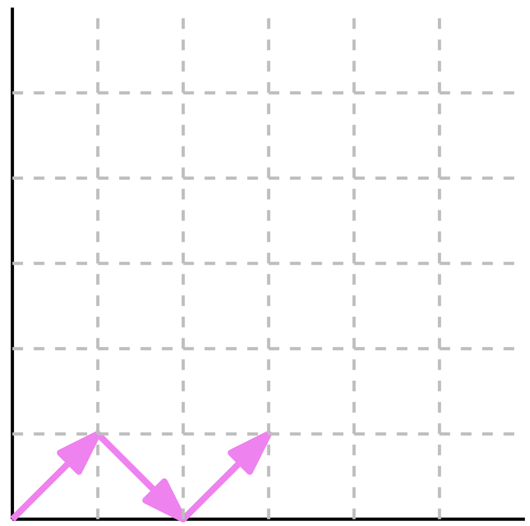
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

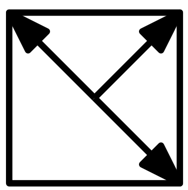
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

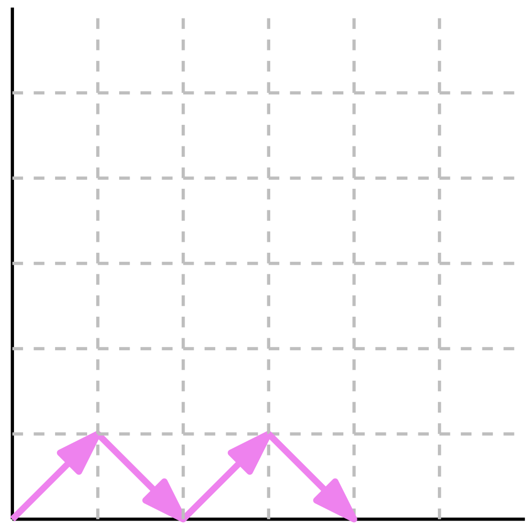
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

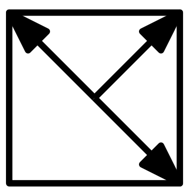
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

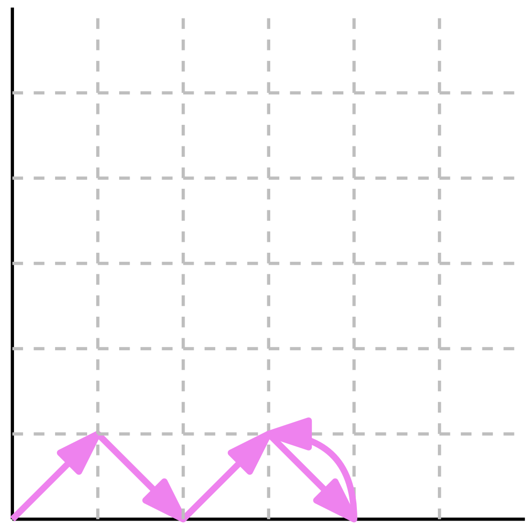
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

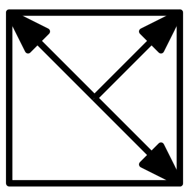
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

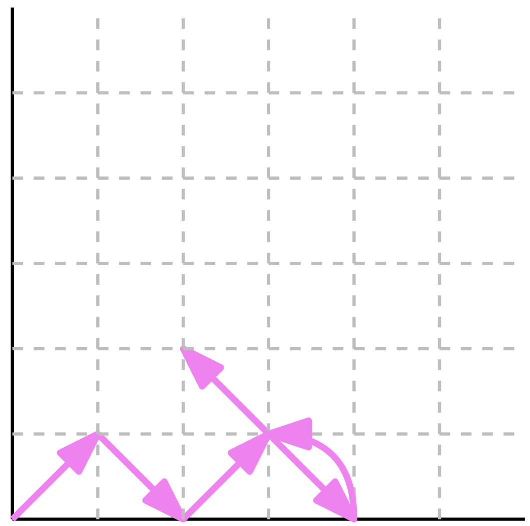
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

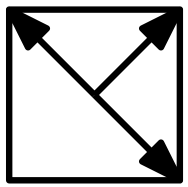
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

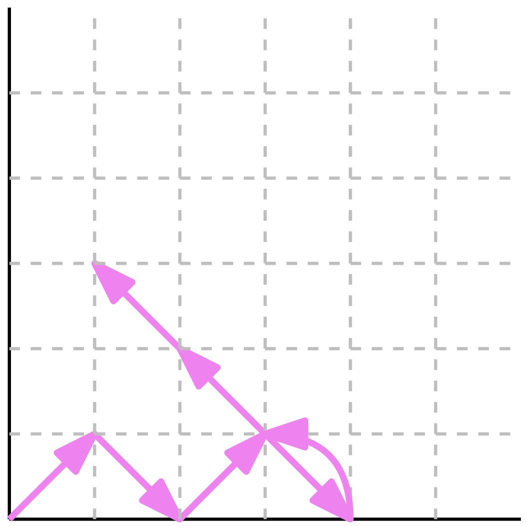
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

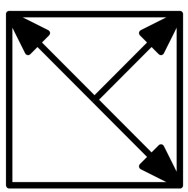
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

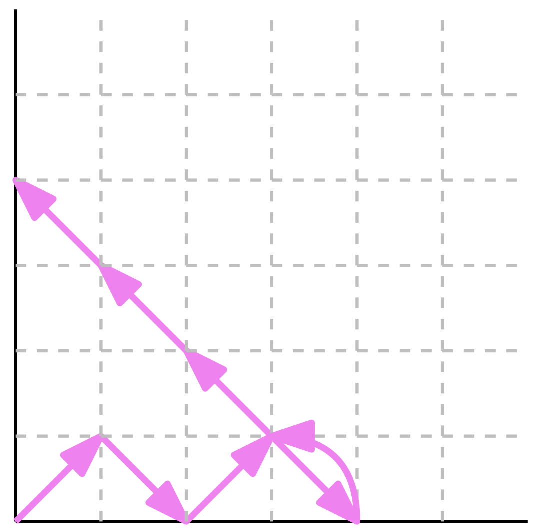
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

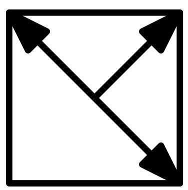
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

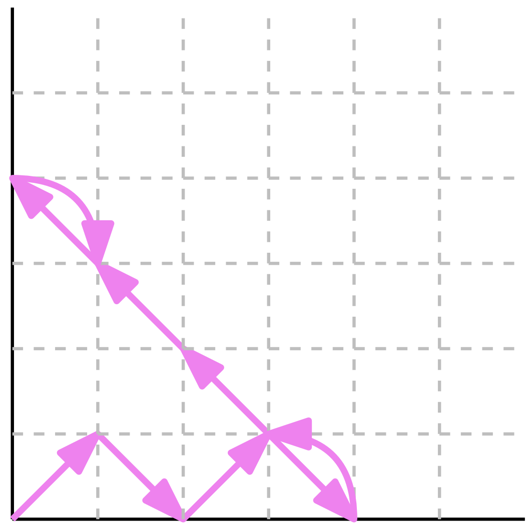
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

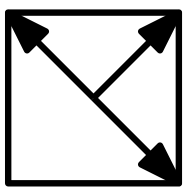
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

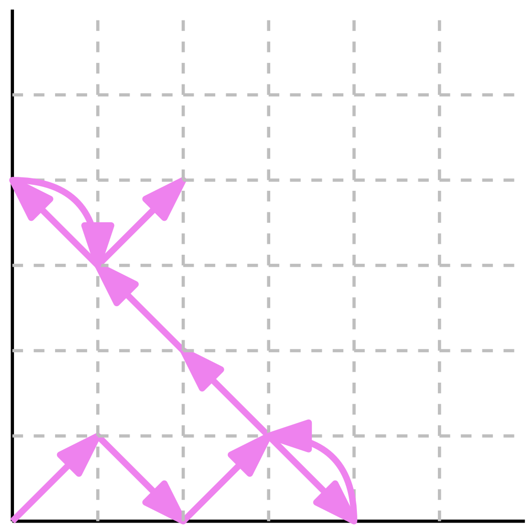
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

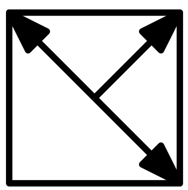
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

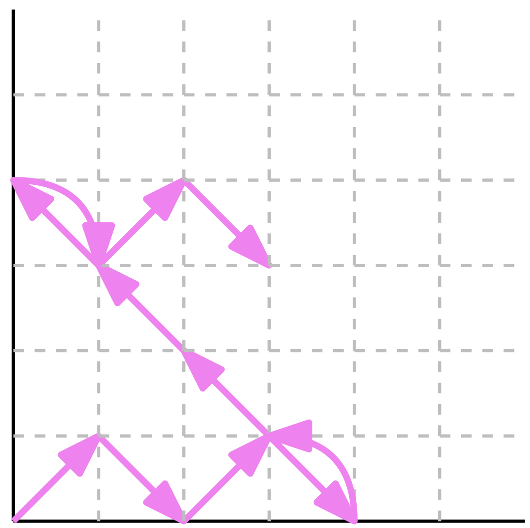
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

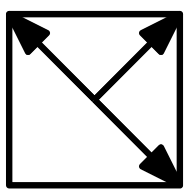
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

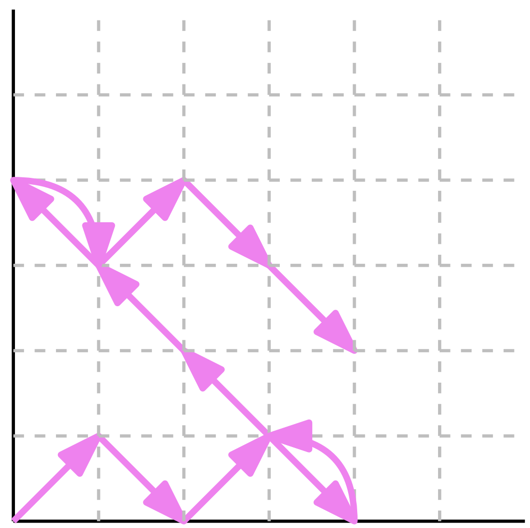
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

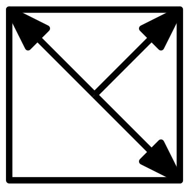
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

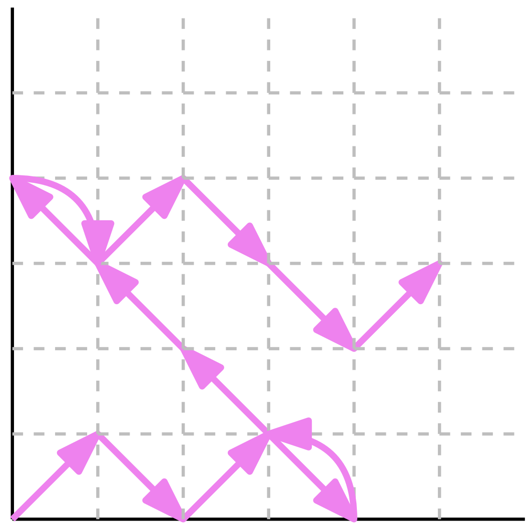
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

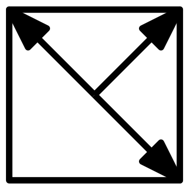
Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

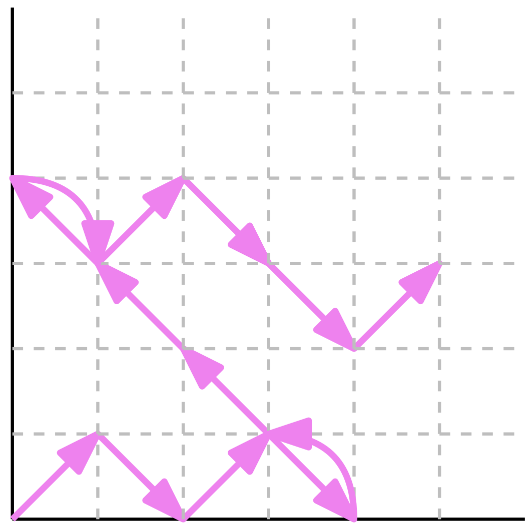
$\mathcal{S} =$ 



# Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

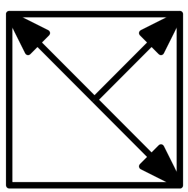
$\mathcal{S} =$ 

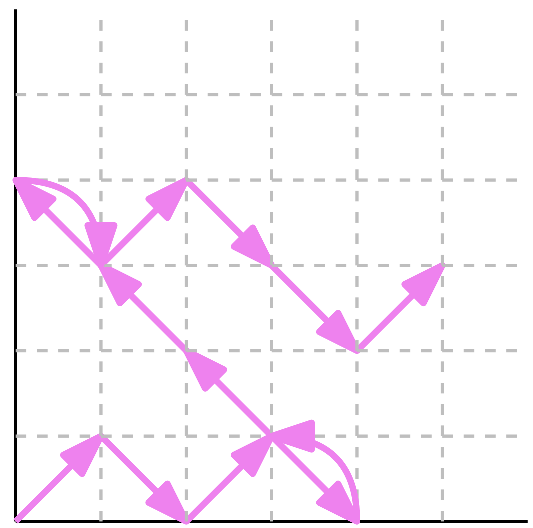


**Problème :** énumérer ces marches, selon différentes statistiques :

# Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

$\mathcal{S} =$ 



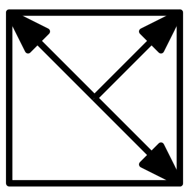
$n = 13$

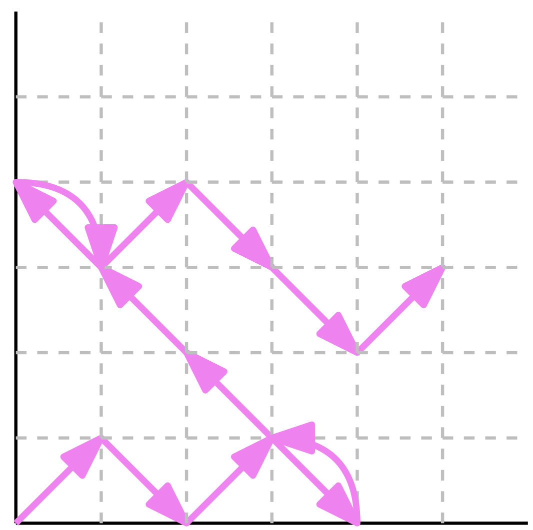
**Problème :** énumérer ces marches, selon différentes statistiques :

- nombre de pas utilisés $n$

# Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

$\mathcal{S} =$ 



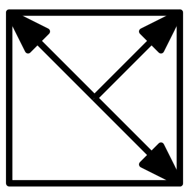
$n = 13 \quad (i,j) = (5,3)$

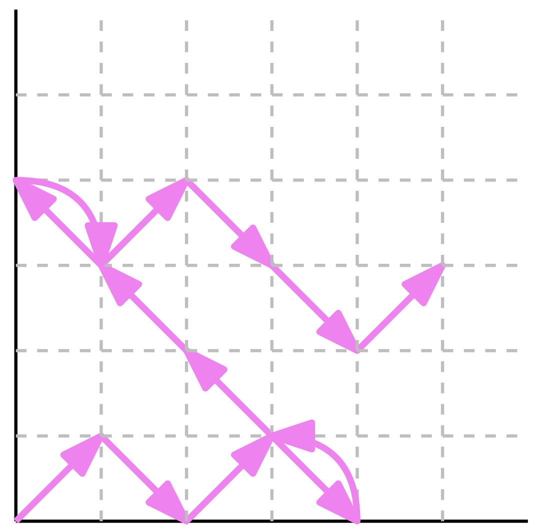
**Problème :** énumérer ces marches, selon différentes statistiques :

- nombre de pas utilisés $n$
- coordonnées finales $(i,j)$

# Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

$\mathcal{S} =$ 



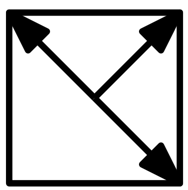
$n = 13 \quad (i,j) = (5,3)$
$n_{(1,1)} = 4$, $n_{(-1,1)} = 4$, $n_{(1,-1)} = 5$

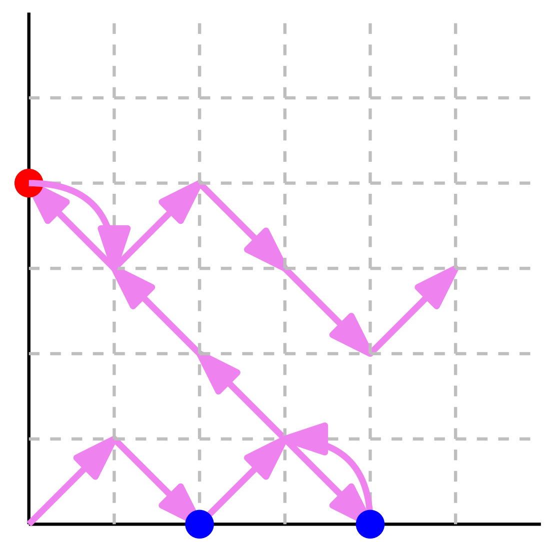
**Problème :** énumérer ces marches, selon différentes statistiques :

- nombre de pas utilisés $n$
- coordonnées finales $(i,j)$
- nombre d'occurences $n_p$ de chaque pas $p \in \mathcal{S}$

# Marches dans le quart de plan à bords interactifs

Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

$\mathcal{S} =$ 



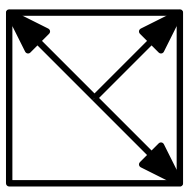
$n = 13 \quad (i,j) = (5,3)$
$n_{(1,1)} = 4$, $n_{(-1,1)} = 4$, $n_{(1,-1)} = 5$
$n_x = 2$, $n_y = 1$

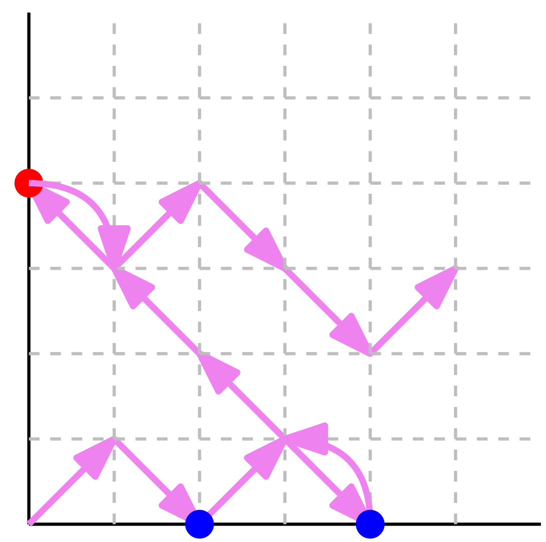
**Problème :** énumérer ces marches, selon différentes statistiques :

- nombre de pas utilisés $n$
- coordonnées finales $(i,j)$
- nombre d'occurences $n_p$ de chaque pas $p \in \mathcal{S}$
- nombre de contacts avec chacun des axes

# Marches dans le quart de plan $\boxed{\text{à bords interactifs}}$

Étant donné un ensemble fini de pas $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ou **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** selon ses pas.

$\mathcal{S} =$ 



$n = 13 \quad (i,j) = (5,3)$
$n_{(1,1)} = 4$, $n_{(-1,1)} = 4$, $n_{(1,-1)} = 5$
$n_x = 2$, $n_y = 1$

**Problème :** énumérer ces marches, selon différentes statistiques :

- nombre de pas utilisés $n$
- coordonnées finales $(i,j)$
- nombre d'occurences $n_p$ de chaque pas $p \in \mathcal{S}$
- nombre de contacts avec chacun des axes

**Série génératrice:** $Q(x,y) = \sum_{\text{marches}} \left( a^{n_x} b^{n_y} \prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) x^i y^j t^n \in \mathbb{Q}[d_p, a, b, x, y][[t]]$

# Équation fonctionnelle [Beaton,Owczarek,Rechnitzer,2019]

$$Q(x,y) = \sum_{\text{marches}} \left( \prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n \qquad S(x,y) = \textstyle\sum_{p\in\mathcal{S}} d_p x^k y^l$$

$$\boxed{\begin{aligned} xy(1 - tS(x,y))\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \tfrac{xy}{ab} \\ &+ ((1-1/b)x - t([x^{-1}]S(x,y)))yQ(0,y) \\ &+ ((1-1/a)y - t([y^{-1}]S(x,y)))xQ(x,0) \\ &- \left(\tfrac{xy}{ab}(1-a)(1-b) - t[x^{-1}y^{-1}]S(x,y)\right) Q(0,0) \end{aligned}}$$

Équation à deux **variables catalytiques** x et y

# Classification

$Q(x, y)$ la série des marches est-elle :

# Classification

$Q(x, y)$ la série des marches est-elle :

**Rationnelle ?** $Q(x, y) = A(x, y, t)/B(x, y, t)$

# Classification

$Q(x, y)$ la série des marches est-elle :

**Rationnelle ?** $Q(x, y) = A(x, y, t)/B(x, y, t)$

**Algébrique ?** $P(x, y, t, Q(x, y)) = 0$

# Classification

$Q(x, y)$ la série des marches est-elle :

**Rationnelle ?** $Q(x, y) = A(x, y, t)/B(x, y, t)$

**Algébrique ?** $P(x, y, t, Q(x, y)) = 0$

**D-finie ?** $P_z(x, y, t, \partial_z)(Q(x, y)) = 0 \ \forall z \in \{x, y, t\}$

# Classification

$Q(x, y)$ la série des marches est-elle :

**Rationnelle ?** $Q(x, y) = A(x, y, t)/B(x, y, t)$

**Algébrique ?** $P(x, y, t, Q(x, y)) = 0$

**D-finie ?** $P_z(x, y, t, \partial_z)(Q(x, y)) = 0 \; \forall z \in \{x, y, t\}$

**D-algébrique ?** $P_z(x, y, t, \partial_z^{0,1,\cdots} Q(x, y)) = 0 \; \forall z \in \{x, y, t\}$

# Classification

$Q(x,y)$ la série des marches est-elle :

**Rationnelle ?** $\quad Q(x,y) = A(x,y,t)/B(x,y,t)$

$\cap$

**Algébrique ?** $\quad P(x,y,t,Q(x,y)) = 0$

$\cap$

**D-finie ?** $\quad P_z(x,y,t,\partial_z)(Q(x,y)) = 0 \ \forall z \in \{x,y,t\}$

$\cap$

**D-algébrique ?** $\quad P_z(x,y,t,\partial_z^{0,1,\cdots} Q(x,y)) = 0 \ \forall z \in \{x,y,t\}$

# Classification

$Q(x,y)$ la série des marches est-elle :

**Rationnelle ?** $Q(x,y) = A(x,y,t)/B(x,y,t)$

$\cap$

**Algébrique ?** $P(x,y,t,Q(x,y)) = 0$

$\cap$

**D-finie ?** $P_z(x,y,t,\partial_z)(Q(x,y)) = 0 \ \forall z \in \{x,y,t\}$

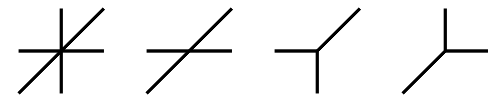
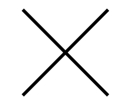
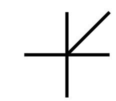
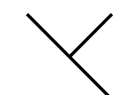
$\cap$

**D-algébrique ?** $P_z(x,y,t,\partial_z^{0,1,\cdots} Q(x,y)) = 0 \ \forall z \in \{x,y,t\}$

**Hypertranscendante ?**

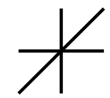
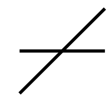
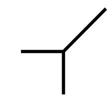
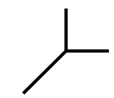
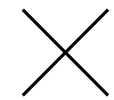
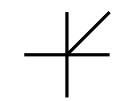
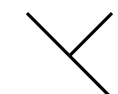
# Classification des marches à petits pas (a=b=1) ('08-'18)

**79** cas non triviaux à symétrie près

- **Algébriques : 4** modèles 
- **D-finis : 19** modèles, par exemple 
- **D-algébriques : 9** modèles, par exemple 
- **Hypertranscendants : 47** modèles, par exemple 

# Classification des marches à petits pas (a=b=1) ('08-'18)

**79** cas non triviaux à symétrie près

- **Algébriques : 4** modèles    
- **D-finis : 19** modèles, par exemple 
- **D-algébriques : 9** modèles, par exemple 
- **Hypertranscendants : 47** modèles, par exemple 

**Combinatoire :** Bousquet-Mélou, Melczer, Mishna, Rechnitzer,. . .

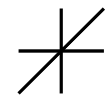
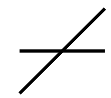
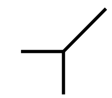
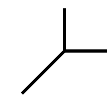
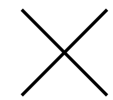
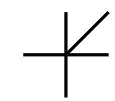
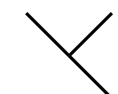
**Calcul formel :** Bostan, Kauers, Salvy, Zeilberger, . . .

**Probabilités :** Fayolle, Kurkova, Raschel,. . .

**Théorie de Galois aux différences :** Dreyfus, Hardouin, Roques, Singer,. . .

# Classification des marches à petits pas (a=b=1) ('08-'18)

**79** cas non triviaux à symétrie près

- **Algébriques : 4** modèles    
- **D-finis : 19** modèles, par exemple 
- **D-algébriques : 9** modèles, par exemple 
- **Hypertranscendants : 47** modèles, par exemple 

**Combinatoire :** Bousquet-Mélou, Melczer, Mishna, Rechnitzer,...

**Calcul formel :** Bostan, Kauers, Salvy, Zeilberger, ...

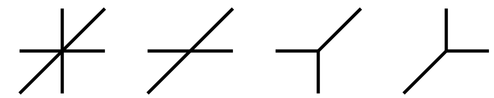
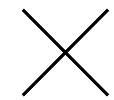
**Probabilités :** Fayolle, Kurkova, Raschel,...

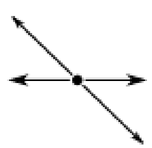
**Théorie de Galois aux différences :** Dreyfus, Hardouin, Roques, Singer,...

**Question:** Dans quelle mesure le choix d'autres poids de Boltzmann $a$ et $b$ change la classification de $Q(x,y,t)$, $Q(1,1,t)$ et $Q(0,0,t)$?

# Classification des marches à petits pas (a=b=1) ('08-'18)

**79** cas non triviaux à symétrie près

- **Algébriques : 4** modèles 
- **D-finis : 19** modèles, par exemple 

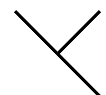
| | Model | (1,1) | (a,a) | (a,1) | (1,b) | (a,b) | Group |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 |  | DF ✓ | DAlg ✓ | DF ✓ | DF ✓ | DAlg ✓ | 8: $(\overline{x}y, y), (x, x^2\overline{y})$ |

[Beaton,Owczarek,Rechnitzer,2019]

**Question:** Dans quelle mesure le choix d'autres poids de Boltzmann $a$ et $b$ change la classification de $Q(x,y,t)$, $Q(1,1,t)$ et $Q(0,0,t)$?

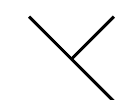
## Classification des marches à petits pas (a=b=1) ('08-'18)

**79** cas non triviaux à symétrie près

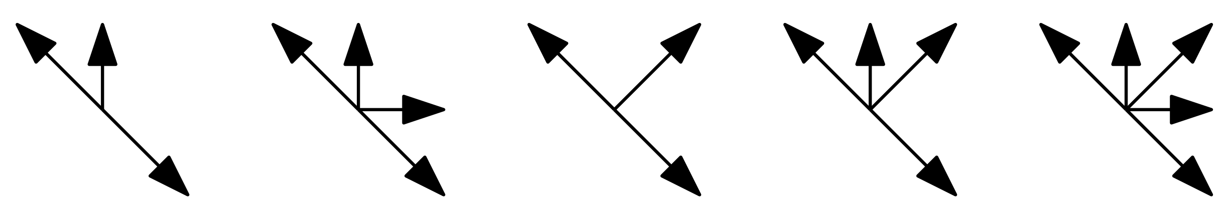
- **Hypertranscendants : 47** modèles, par exemple 

# Classification des marches à petits pas (a=b=1) ('08-'18)

**79** cas non triviaux à symétrie près

- **Hypertranscendants : 47** modèles, par exemple 

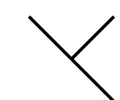
**Théorème** [Dreyfus,Hardouin,Roques,Singer,2018]



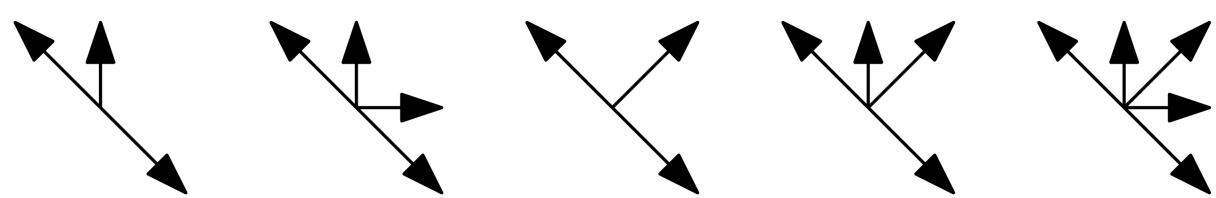
Tous les modèles de **genre 0** sont **hypertranscendants**.

# Classification des marches à petits pas (a=b=1) ('08-'18)

**79** cas non triviaux à symétrie près

- **Hypertranscendants : 47** modèles, par exemple 

**Théorème** [Dreyfus,Hardouin,Roques,Singer,2018]



Tous les modèles de **genre 0** sont **hypertranscendants**.

**Question:** Le sont-ils toujours avec d'autres poids que $a = b = 1$ ?

# Classification des modèles de genre 0 à bords interactifs

**Paramètres :** $(d_p)_{p \in \mathcal{S}}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ dans $\mathbb{C}$

## Classification des modèles de genre 0 à bords interactifs

**Paramètres :** $(d_p)_{p\in\mathcal{S}}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ dans $\mathbb{C}$

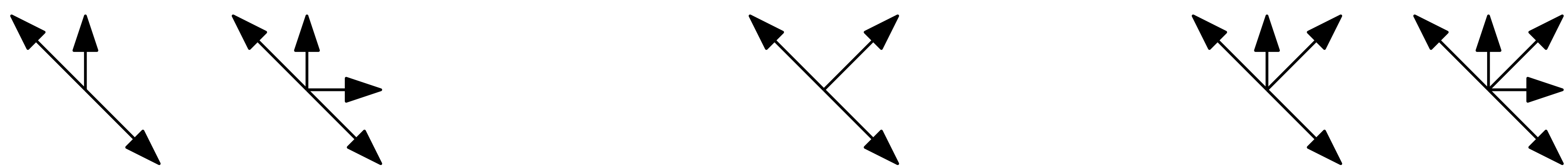
**Question :** Nature de la série génératrice $Q(x,y)$ selon $x$ et $y$

# Classification des modèles de genre 0 à bords interactifs

**Paramètres :** $(d_p)_{p\in\mathcal{S}}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ dans $\mathbb{C}$

**Question :** Nature de la série génératrice $Q(x,y)$ selon $x$ et $y$

**Theorème** [B., 2024]

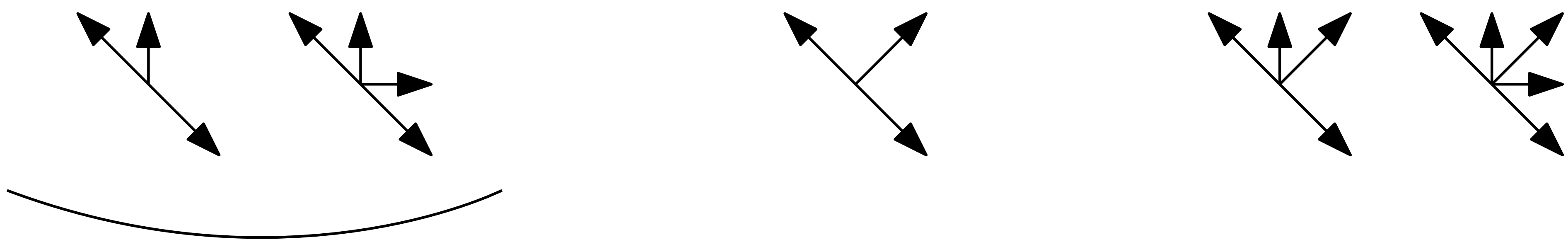


# Classification des modèles de genre 0 à bords interactifs

**Paramètres :** $(d_p)_{p\in\mathcal{S}}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ dans $\mathbb{C}$

**Question :** Nature de la série génératrice $Q(x,y)$ selon $x$ et $y$

**Theorème** [B., 2024]



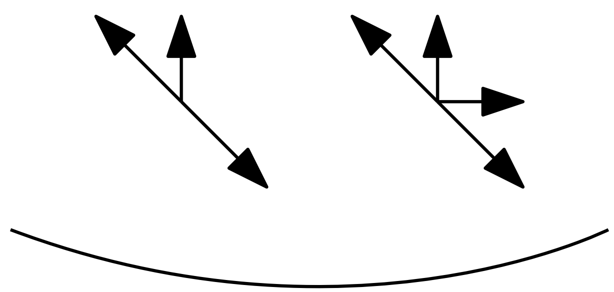
**Rationnels** ssi $a+b=ab$

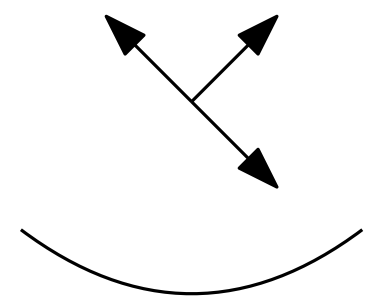
# Classification des modèles de genre 0 à bords interactifs

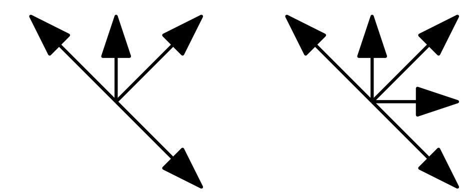
**Paramètres :** $(d_p)_{p\in\mathcal{S}}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ dans $\mathbb{C}$

**Question :** Nature de la série génératrice $Q(x,y)$ selon $x$ et $y$

**Theorème** [B., 2024]







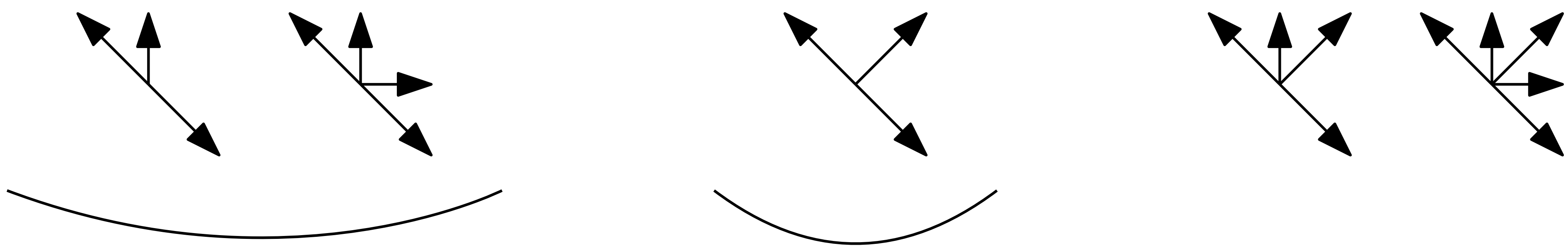
**Rationnels** ssi $a+b=ab$ **Algébrique** ssi $a=b=2$

# Classification des modèles de genre 0 à bords interactifs

**Paramètres :** $(d_p)_{p\in\mathcal{S}}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ dans $\mathbb{C}$

**Question :** Nature de la série génératrice $Q(x,y)$ selon $x$ et $y$

**Theorème** [B., 2024]



**Rationnels** ssi $a+b=ab$ **Algébrique** ssi $a=b=2$

Pour tous les autres poids, $Q(x,y)$ est **hypertranscendante**.

# II. Équations aux q-différences

# Équation aux q-différences I: le noyau

$$\frac{1}{xy}K(x,y)\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x,y)x{\color{blue}Q(x,0)} + \gamma_2(x,y)y{\color{red}Q(0,y)}$$

# Équation aux q-différences I: le noyau

$$\frac{1}{xy}K(x,y)\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x,y)x\textcolor{blue}{Q(x,0)} + \gamma_2(x,y)y\textcolor{red}{Q(0,y)}$$

- $\omega \in \mathbb{Q}(a,b)$, et $\gamma_1(x,y), \gamma_2(x,y) \in \mathbb{Q}(a,b,d_p,x,y,t)$ connues

# Équation aux q-différences I: le noyau

$$\frac{1}{xy}K(x,y)\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

- $\omega \in \mathbb{Q}(a,b)$, et $\gamma_1(x,y), \gamma_2(x,y) \in \mathbb{Q}(a,b,d_p,x,y,t)$ connues
- $K(x,y) := xy(1-tS(x,y)) \in \mathbb{Q}(d_{i,j})[x,y,t]$ le **noyau**

# Équation aux q-différences I: le noyau

$$\frac{1}{xy}K(x,y)\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

- $\omega \in \mathbb{Q}(a,b)$, et $\gamma_1(x,y), \gamma_2(x,y) \in \mathbb{Q}(a,b,d_p,x,y,t)$ connues
- $K(x,y) := xy(1 - tS(x,y)) \in \mathbb{Q}(d_{i,j})[x,y,t]$ le **noyau**

**Idée:** annuler le noyau $\Rightarrow$ équations sur $Q(x,0)$ et $Q(0,y)$

# Équation aux q-différences I: le noyau

$$\frac{1}{xy}K(x,y)\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

- $\omega \in \mathbb{Q}(a,b)$, et $\gamma_1(x,y), \gamma_2(x,y) \in \mathbb{Q}(a,b,d_p,x,y,t)$ connues
- $K(x,y) := xy(1 - tS(x,y)) \in \mathbb{Q}(d_{i,j})[x,y,t]$ le **noyau**

**Idée:** annuler le noyau $\Rightarrow$ équations sur $Q(x,0)$ et $Q(0,y)$

La courbe du noyau est de **genre** $0$ : $(x',y') = (x(s), y(s))$ pour $s \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

# Équation aux q-différences I: le noyau

$$\frac{1}{xy}K(x,y)\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

- $\omega \in \mathbb{Q}(a,b)$, et $\gamma_1(x,y), \gamma_2(x,y) \in \mathbb{Q}(a,b,d_p,x,y,t)$ connues
- $K(x,y) := xy(1 - tS(x,y)) \in \mathbb{Q}(d_{i,j})[x,y,t]$ le **noyau**

**Idée:** annuler le noyau $\Rightarrow$ équations sur $Q(x,0)$ et $Q(0,y)$

La courbe du noyau est de **genre** $0$ : $(x',y') = (x(s),y(s))$ pour $s \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

$$0 = \omega + \gamma_1(x(s),y(s))x(s)Q(x(s),0) + \gamma_2(x(s),y(s))y(s)Q(0,y(s))$$

# Équation aux q-différences II: symétries

$$\frac{1}{xy}K(x,y)\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

# Équation aux q-différences II: symétries

$$\frac{1}{xy}K(x,y)\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

**Évaluation** en $(x,y) = (x(s), y(s))$ pour $s \in U_0$ :

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(s)x(s)Q(x(s),0) + \widetilde{\gamma}_2(s)y(s)Q(0,y(s))$$

$$\widetilde{\gamma}_1(s) = \gamma_1(x(s),y(s))$$
$$\widetilde{\gamma}_2(s) = \gamma_2(x(s),y(s))$$

# Équation aux q-différences II: symétries

$$\frac{1}{xy}K(x,y)\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

**Évaluation** en $(x,y) = (x(s), y(s))$ pour $s \in U_0$ :

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(s)x(s)Q(x(s),0) + \widetilde{\gamma}_2(s)y(s)Q(0,y(s))$$

$$\widetilde{\gamma}_1(s) = \gamma_1(x(s),y(s))$$
$$\widetilde{\gamma}_2(s) = \gamma_2(x(s),y(s))$$

**Évaluation** en $(x,y) = (x(\frac{q}{s}), y(\frac{q}{s})) = (x(\frac{s}{q}), y(s))$ pour $s \in U_0$ :

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(\tfrac{q}{s})x(\tfrac{s}{q})Q(x(\tfrac{s}{q}),0) + \widetilde{\gamma}_2(\tfrac{q}{s})y(s)Q(0,y(s))$$

# Équation aux q-différences II: symétries

$$\frac{1}{xy}K(x,y)\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

**Évaluation** en $(x,y) = (x(s), y(s))$ pour $s \in U_0$ :

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(s)x(s)Q(x(s),0) + \widetilde{\gamma}_2(s)y(s)Q(0,y(s))$$

$$\widetilde{\gamma}_1(s) = \gamma_1(x(s),y(s))$$
$$\widetilde{\gamma}_2(s) = \gamma_2(x(s),y(s))$$

**Évaluation** en $(x,y) = (x(\frac{q}{s}), y(\frac{q}{s})) = (x(\frac{s}{q}), y(s))$ pour $s \in U_0$ :

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(\tfrac{q}{s})x(\tfrac{s}{q})Q(x(\tfrac{s}{q}),0) + \widetilde{\gamma}_2(\tfrac{q}{s})y(s)Q(0,y(s))$$

$$F(s) = x(\tfrac{s}{q})Q(x(\tfrac{s}{q}),0) \qquad F(\tfrac{s}{q}) = u(s)F(s) + \omega \cdot v(s)$$

# Équations aux q-différences III: caractérisation

$$\frac{1}{xy}K(x,y)\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

$$F(\tfrac{s}{q}) = u(s)F(s) + \omega \cdot v(s)$$

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(s)F(s) + \widetilde{\gamma}_2(s)G(s) \qquad (E)$$

$F(s) = x(s)Q(x(s),0)$ $\quad$ $G(s) = y(s)Q(0,y(s))$ $\quad$ pour $s \in U_0$

# Équations aux q-différences III: caractérisation

$$\frac{1}{xy}K(x,y)\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

$$F(\tfrac{s}{q}) = u(s)F(s) + \omega \cdot v(s)$$

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(s)F(s) + \widetilde{\gamma}_2(s)G(s) \qquad (E)$$

$$F(s) = x(s)Q(x(s),0) \qquad G(s) = y(s)Q(0,y(s)) \qquad \text{pour } s \in U_0$$

$Q(x,y)$ algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ et $G(s)$ algébriques ou rationnelles

$Q(x,y)$ D-finie $\Leftrightarrow$ $F(s)$ et $G(s)$ D-finies

$Q(x,y)$ D-algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ et $G(s)$ D-algébriques

# Équations aux q-différences IV: critère Galoisien

# Équations aux q-différences IV: critère Galoisien

**Théorème** [Ishizaki,98]
Les solutions méromorphes d'équations aux q-différences à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

## Équations aux q-différences IV: critère Galoisien

**Théorème** [Ishizaki,98]
Les solutions méromorphes d'équations aux q-différences à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

**Stratégie:**

# Équations aux q-différences IV: critère Galoisien

**Théorème** [Ishizaki,98]
Les solutions méromorphes d'équations aux q-différences à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

**Stratégie:**

$Q(x, y)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ rationnelle

# Équations aux q-différences IV: critère Galoisien

**Théorème** [Ishizaki,98]
Les solutions méromorphes d'équations aux q-différences à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

**Stratégie:**
$Q(x,y)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ rationnelle

- si (E) a une unique solution, rationnelle, on montre que $Q(x,y)$ est **algébrique**

# Équations aux q-différences IV: critère Galoisien

**Théorème** [Ishizaki,98]
Les solutions méromorphes d'équations aux q-différences à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

**Stratégie:**
$Q(x,y)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ rationnelle

- si (E) a une unique solution, rationnelle, on montre que $Q(x,y)$ est **algébrique**

- si (E) n'a pas de solution rationnelle, on montre que $Q(x,y)$ est **hypertranscendante**

# III. Classification

# Propagation de pôles

$$F\left(\frac{s}{q}\right) = u(s)F(s) + \omega \cdot v(s) \qquad (E)$$

# Propagation de pôles

$$F\left(\frac{s}{q}\right) = u(s)F(s) + \omega \cdot v(s) \qquad (E)$$

**Lemme** Il existe des ensembles finis $\mathcal{L}^-$ et $\mathcal{L}^+$ (dépendants des coefficients de (E)) tels que si $s$ est un pôle de $F$:

- si $s \notin \mathcal{L}^+$ alors $qs$ est un pôle de $F$
- si $s \notin \mathcal{L}^-$ alors $\frac{s}{q}$ est un pôle de $F$

# Propagation de pôles

$$F\left(\frac{s}{q}\right) = u(s)F(s) + \omega \cdot v(s) \qquad (E)$$

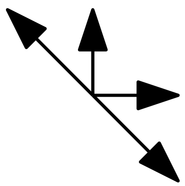
**Lemme** Il existe des ensembles finis $\mathcal{L}^-$ et $\mathcal{L}^+$ (dépendants des coefficients de (E)) tels que si $s$ est un pôle de $F$:

- si $s \notin \mathcal{L}^+$ alors $qs$ est un pôle de $F$
- si $s \notin \mathcal{L}^-$ alors $\frac{s}{q}$ est un pôle de $F$

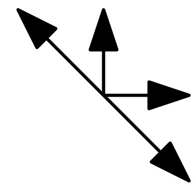
**Corollaire** Si $F$ est rationnelle et $s$ est un pôle de $F$ distinct de $0$ et $\infty$, alors $s$ est de la forme suivante :

$$q^{-m}s \in \mathcal{L}^- \xleftarrow{q^{-m}} s \xrightarrow{q^n} q^n s \in \mathcal{L}^+$$

# Distance entre points



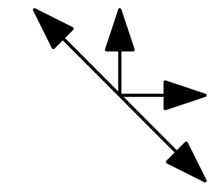
# Distance entre points



**Def** s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $q^n s^- = s^+$ on écrit $n$, sinon $\perp$

# Distance entre points

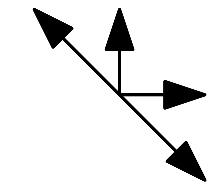
**Def** s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $q^n s^- = s^+$ on écrit $n$, sinon $\perp$



| $\mathcal{L}^- \backslash \mathcal{L}^+$ | $\frac{1}{s_1}$ | $\frac{1}{s_2}$ | $\frac{s_3}{q}$ | $\frac{s_4}{q}$ |
|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | $\perp$ | $-1$ si $a = 1$<br>$\perp$ sinon | $-1$ | $\perp$ |
| $s_2$ | | $\perp$ | $\perp$ | $0$ si $a + b = ab$<br>$-2$ si $a = b = 1$<br>$\perp$ sinon |
| $\frac{q}{s_3}$ | | | $\perp$ | $-2$ si $b = 1$<br>$\perp$ sinon |
| $\frac{q}{s_4}$ | | | | $\perp$ |

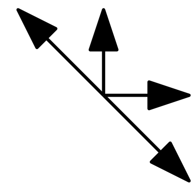
# Distance entre points

**Def** s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $q^n s^- = s^+$ on écrit $n$, sinon $\perp$



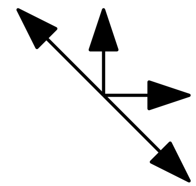
| $\mathcal{L}^- \backslash \mathcal{L}^+$ | $\frac{1}{s_1}$ | $\frac{1}{s_2}$ | $\frac{s_3}{q}$ | $\frac{s_4}{q}$ |
|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | $\perp$ | $-1$ si $a = 1$<br>$\perp$ sinon | $-1$ | $\perp$ |
| $s_2$ | | $\perp$ | $\perp$ | $\mathbf{0}$ **si** $\mathbf{a + b = ab}$<br>$-2$ si $a = b = 1$<br>$\perp$ sinon |
| $\frac{q}{s_3}$ | | | $\perp$ | $-2$ si $b = 1$<br>$\perp$ sinon |
| $\frac{q}{s_4}$ | | | | $\perp$ |

## Un ensemble de pas



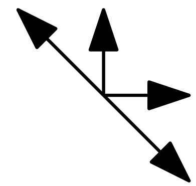
- Supposons que $a + b \neq ab$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ D-algébrique

## Un ensemble de pas



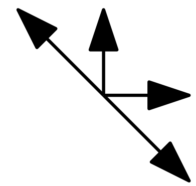
- Supposons que $a + b \neq ab$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ D-algébrique
    - $F(s)$ est rationnelle par le critère Galoisien

# Un ensemble de pas



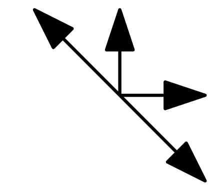
- Supposons que $a+b \neq ab$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ D-algébrique
  - $F(s)$ est rationnelle par le critère Galoisien
    - on montre que si $a+b \neq ab$, les seuls pôles de $F$ sont $0$ et $\infty$

# Un ensemble de pas



- Supposons que $a + b \neq ab$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ D-algébrique
  - $F(s)$ est rationnelle par le critère Galoisien
    - on montre que si $a + b \neq ab$, les seuls pôles de $F$ sont $0$ et $\infty$
    - on montre que si $a + b \neq ab$, alors $(E)$ n'a pas de solution homogène

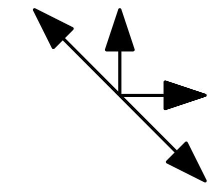
# Un ensemble de pas



- Supposons que $a+b \neq ab$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ D-algébrique
  - $F(s)$ est rationnelle par le critère Galoisien
    - on montre que si $a+b \neq ab$, les seuls pôles de $F$ sont $0$ et $\infty$
    - on montre que si $a+b \neq ab$, alors $(E)$ n'a pas de solution homogène

$\Rightarrow F(s) = P(\frac{1}{x(s)}) \Rightarrow x(s)Q(x(s),0) = P(\frac{1}{x(s)}) \Rightarrow xQ(x,0) \in \mathbb{C}[\frac{1}{x}]$, absurde

# Un ensemble de pas



- Supposons que $a+b \neq ab$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ D-algébrique
  - $F(s)$ est rationnelle par le critère Galoisien
    - on montre que si $a+b \neq ab$, les seuls pôles de $F$ sont $0$ et $\infty$
    - on montre que si $a+b \neq ab$, alors $(E)$ n'a pas de solution homogène

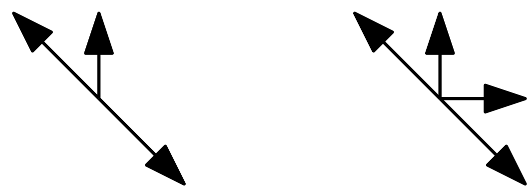
$\Rightarrow F(s) = P(\frac{1}{x(s)}) \Rightarrow x(s)Q(x(s),0) = P(\frac{1}{x(s)}) \Rightarrow xQ(x,0) \in \mathbb{C}[\frac{1}{x}]$, absurde

- Si $a+b = ab$, on trouve une unique solution (!) :

$$Q(x,0) = \frac{1}{1 - x\frac{ad_{1,0}t + abd_{1,-1}d_{0,1}t^2}{1-abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2}}$$

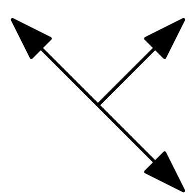
$$Q(0,y) = \frac{1}{1 - y\frac{bd_{0,1}t + abd_{-1,1}d_{1,0}t^2}{1-abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2}}$$

# Les modèles différentiellement algébriques



$$a = 1 + \varepsilon$$
$$b = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$$

$$Q(x,0) = \frac{1}{1 - x\frac{ad_{1,0}t + abd_{1,-1}d_{0,1}t^2}{1 - abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2}}$$
$$Q(0,y) = \frac{1}{1 - y\frac{bd_{0,1}t + abd_{-1,1}d_{1,0}t^2}{1 - abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2}}$$



$$a = b = 2$$

$$Q(x,0) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2\frac{4d_{1,1}d_{1,-1}t^2}{1 - 4d_{1,-1}d_{-1,1}t^2}}}$$
$$Q(0,y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2\frac{4d_{1,1}d_{-1,1}t^2}{1 - 4d_{1,-1}d_{-1,1}t^2}}}$$

# Perspectives

# Perspectives

- Cas algébriques : preuves alternatives, transitions de phase des cas rationnels

# Perspectives

- Cas algébriques : preuves alternatives, transitions de phase des cas rationnels

- montrer l'hypertranscendance en $t$, quid de $Q(1,1)$ ?

# Perspectives

- Cas algébriques : preuves alternatives, transitions de phase des cas rationnels

- montrer l'hypertranscendance en $t$, quid de $Q(1,1)$ ?

- trouver des poids de Boltzmann appropriés pour les modèles de genre $1$ via des méthodes similaires

## Perspectives

- Cas algébriques : preuves alternatives, transitions de phase des cas rationnels

- montrer l'hypertranscendance en $t$, quid de $Q(1,1)$ ?

- trouver des poids de Boltzmann appropriés pour les modèles de genre $1$ via des méthodes similaires

# Merci de votre attention !