Approche par compensation pour marches singulières dans un quart de plan

Pierre Tarrago
(travail en commun avec Viet Hung Hoang et Kilian Raschel)

16 avril 2025

Marche aléatoire singulière dans un cône

- $(X(n))_{n\geq 1}$ i.i.d de loi X à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = (i,j)), \quad (i,j) \in \mathbb{Z}^2.$$

- $S_n = X(1) + \cdots + X(n)$, $n \geq 1$.
  $(S_n)_{n\geq 1}$ *marche aléatoire* d'incréments $X(n)$.
- $\mathcal{C} = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$, temps de sortie

$$\tau_x = \inf\{n \geq 0 : x + S_n \notin C\} \leq \infty.$$

- $\mu := \mathbb{E}[X(1)] \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_x = +\infty) > 0.$

Marche aléatoire singulière dans un cône

- $(X(n))_{n\geq 1}$ i.i.d de loi X à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = (i,j)), \quad (i,j) \in \mathbb{Z}^2.$$

- $S_n = X(1) + \cdots + X(n)$, $n \geq 1$.
  $(S_n)_{n\geq 1}$ *marche aléatoire* d'incréments $X(n)$.
- $\mathcal{C} = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$, temps de sortie

$$\tau_x = \inf\{n \geq 0 : x + S_n \notin C\} \leq \infty.$$

- $\mu := \mathbb{E}[X(1)] \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_x = +\infty) > 0$.
- Marche singulière à petits pas négatifs :

1. $p_{ij} = 0$ si $i \leq -2$, $j \leq -2$ ou $i + j \leq -1$,
2. $\mu \in \mathcal{C}$,
3. $\mathbb{E}[e^{v \cdot X}] < +\infty$ pour $v \in D$, D assez grand.

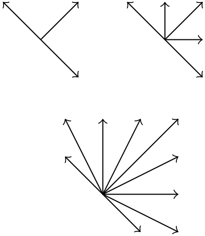


Figure: Marches singulières à petits pas négatifs.

Fonction harmonique et conditionnement de Doob

- Fonction harmonique : $h : \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que

$$h(x) = \mathbb{E}[h(x+X), \tau_x > 1] = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{C}} p_{i,j} h(x + (i,j)). \qquad (0.1)$$

Example

$h_0 : x \mapsto \mathbb{P}(\tau_x = +\infty)$ est harmonique (non-nulle si $\mu \in \mathcal{C}$).

Fonction harmonique et conditionnement de Doob

- Fonction harmonique : $h : \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que

$$h(x) = \mathbb{E}[h(x+X), \tau_x > 1] = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{C}} p_{i,j} h(x + (i,j)). \qquad (0.1)$$

Example

$h_0 : x \mapsto \mathbb{P}(\tau_x = +\infty)$ est harmonique (non-nulle si $\mu \in \mathcal{C}$).

- Conditionnement de Doob selon h et x_0, $h(x_0) > 0$: $\mathbb{P} \rightsquigarrow \mathbb{P}^h_{x_0}$,

$$\mathbb{P}^h_{x_0}(S_{n+1} = x + (i,j) | S_n = x) = \frac{h(x + (i,j))}{h(x)} p_{ij}.$$

Example

Pour h_0, $\mathbb{P}^{h_0}_{x_0}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | \tau_{x_0} = +\infty)$.

Fonction harmonique et conditionnement de Doob

- Fonction harmonique : $h : \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que

$$h(x) = \mathbb{E}[h(x+X), \tau_x > 1] = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{C}} p_{i,j} h(x+(i,j)). \qquad (0.1)$$

Example

$h_0 : x \mapsto \mathbb{P}(\tau_x = +\infty)$ est harmonique (non-nulle si $\mu \in \mathcal{C}$).

- Conditionnement de Doob selon h et x_0, $h(x_0) > 0$: $\mathbb{P} \rightsquigarrow \mathbb{P}^h_{x_0}$,

$$\mathbb{P}^h_{x_0}(S_{n+1} = x + (i,j) | S_n = x) = \frac{h(x+(i,j))}{h(x)} p_{ij}.$$

Example

Pour h_0, $\mathbb{P}^{h_0}_{x_0}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | \tau_{x_0} = +\infty)$.

- Equation (0.1) difficile à résoudre : non récursive.

Noyau exponentielle de la marche aléatoire

- $K(x,y) = e^{x+y}\left(\sum_{i,j\geq 1} p_{ij} e^{ix+jy} - 1\right)$, noyau exponentiel de la marche aléatoire.
- $\mathcal{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : K(x,y) = 0\}$,

$\mathcal{G}_0 = \{(x,y) \in \mathcal{G}, \nabla K(x,y) \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{G}.$

Noyau exponentielle de la marche aléatoire

- $K(x,y) = e^{x+y}\left(\sum_{i,j\geq 1} p_{ij} e^{ix+jy} - 1\right)$, noyau exponentiel de la marche aléatoire.
- $\mathcal{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : K(x,y) = 0\}$,

$\mathcal{G}_0 = \{(x,y) \in \mathcal{G}, \nabla K(x,y) \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{G}$.

- Quelques propriétés :
  1. $\mathcal{G}$ est la frontière d'un convexe non-borné.
  2. $\mathcal{G}_0$ est homéomorphe à un segment ouvert.
  3. $\overline{\mathcal{G}_0} \setminus \mathcal{G}_0 = \{z_x, z_y\}$.

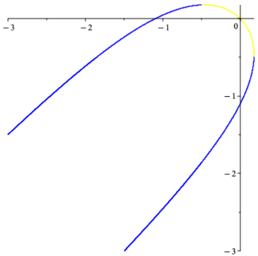


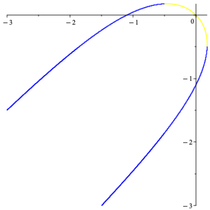
Figure: Exemple de courbe $\mathcal{G}$ avec son sous-ensemble $\mathcal{G}_0$.

Frontière minimale et résultat principal

- $\mathcal{H} = \{h \text{ harmonique}, \ h(1,1) = 1\}$
- $h \in \mathcal{H}$ est dite minimale si

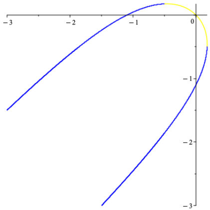
$f \in \mathcal{H}, \lambda > 0, \lambda f \leq h \Rightarrow f = h.$

- $\partial_m \mathcal{H} = \{h \in \mathcal{H}, \ h \text{ minimale}\}.$
- $h \in \mathcal{H} \rightsquigarrow h = \int_{\partial_m \mathcal{H}} g d\mu_h(g).$



Frontière minimale et résultat principal

- $\mathcal{H} = \{h \text{ harmonique}, \ h(1,1) = 1\}$
- $h \in \mathcal{H}$ est dite minimale si
$f \in \mathcal{H}, \lambda > 0, \lambda f \leq h \Rightarrow f = h$.
- $\partial_m \mathcal{H} = \{h \in \mathcal{H}, \ h \text{ minimale}\}$.
- $h \in \mathcal{H} \rightsquigarrow h = \int_{\partial_m \mathcal{H}} g d\mu_h(g)$.



Theorem (Hoang, Raschel, T. (2023))

1. *Pour* $z \in \mathcal{G}_0$, *il existe* $(a_n(z), b_n(z))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{G}^{\mathbb{Z}}$ *avec* $z = (a_0(z), b_0(z))$ *et*

$$h_z(i,j) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ia_n(z)+jb_n(z)} - e^{ia_{n+1}(z)+jb_n(z)} \in \mathcal{H}$$

2. $z \in \mathcal{G}_0 \mapsto \frac{h_z}{h_z(1,1)}$ *s'étend en un homéomorphisme* $\overline{\mathcal{G}_0} \simeq \partial_m \mathcal{H}$.
3. *Sous* $\mathbb{P}^{h_z}$, $(S_n)_{n\geq 0}$ *a une dérive proportionelle à* $\nabla K(z)$.

Approche par compensation : $h_z(i,j) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ia_n(z)+jb_n(z)} - e^{ia_{n+1}(z)+jb_n(z)}$

- Rappel : $K(x,y) = e^{x+y}\left(\sum_{i,j\geq -1} p_{ij} e^{ix+jy} - 1\right)$.
- Pour $(a,b) \in \mathcal{G}$, $1 = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} p_{ij} e^{ia+jb}$.

$$(a,b) \in \mathcal{G} \Rightarrow \forall (i_0,j_0) \in \mathbb{Z}^2,\ e^{i_0 a + j_0 b} = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} p_{ij} e^{(i_0+i)a+(j_0+j)b}.$$

Approche par compensation : $h_z(i,j) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ia_n(z)+jb_n(z)} - e^{ia_{n+1}(z)+jb_n(z)}$

- Rappel : $K(x,y) = e^{x+y}\left(\sum_{i,j\geq -1} p_{ij} e^{ix+jy} - 1\right)$.
- Pour $(a,b) \in \mathcal{G}$, $1 = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} p_{ij} e^{ia+jb}$.

$$(a,b) \in \mathcal{G} \Rightarrow \forall (i_0,j_0) \in \mathbb{Z}^2, e^{i_0 a + j_0 b} = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} p_{ij} e^{(i_0+i)a+(j_0+j)b}.$$

$\rightsquigarrow$ $e_{a,b} : (i,j) \mapsto e^{ai+bj}$ harmonique sauf sur les bords $i=1$ et $j=1$ (car $e_{a,b}$ non nulle en $i=0$ ou $j=0$).

Approche par compensation : $h_z(i,j) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ia_n(z)+jb_n(z)} - e^{ia_{n+1}(z)+jb_n(z)}$

- Rappel : $K(x,y) = e^{x+y}\left(\sum_{i,j\geq -1} p_{ij}e^{ix+jy} - 1\right)$.
- Pour $(a,b)\in\mathcal{G}$, $1 = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} p_{ij}e^{ia+jb}$.

$$(a,b)\in\mathcal{G} \Rightarrow \forall (i_0,j_0)\in\mathbb{Z}^2, e^{i_0a+j_0b} = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} p_{ij}e^{(i_0+i)a+(j_0+j)b}.$$

$\rightsquigarrow$ $e_{a,b} : (i,j)\mapsto e^{ai+bj}$ harmonique sauf sur les bords $i=1$ et $j=1$ (car $e_{a,b}$ non nulle en $i=0$ ou $j=0$).

- si $(a_1,b_1),(a_2,b_1)\in\mathcal{G}$, $e_{a_2,b_1} - e_{a_1,b_1}$ nulle pour $i=0$

$\rightsquigarrow$ $e_{a_2,b_1} - e_{a_1,b_1}$ harmonique en $i=1$ (mais pas en $j=1$).

Approche par compensation : $h_z(i,j) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ia_n(z)+jb_n(z)} - e^{ia_{n+1}(z)+jb_n(z)}$

- Rappel : $K(x,y) = e^{x+y}\left(\sum_{i,j\geq -1} p_{ij}e^{ix+jy} - 1\right)$.
- Pour $(a,b)\in\mathcal{G}$, $1 = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} p_{ij}e^{ia+jb}$.

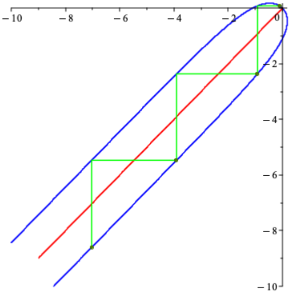
$$(a,b)\in\mathcal{G} \Rightarrow \forall (i_0,j_0)\in\mathbb{Z}^2, e^{i_0a+j_0b} = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} p_{ij}e^{(i_0+i)a+(j_0+j)b}.$$

$\rightsquigarrow$ $e_{a,b} : (i,j)\mapsto e^{ai+bj}$ harmonique sauf sur les bords $i=1$ et $j=1$ (car $e_{a,b}$ non nulle en $i=0$ ou $j=0$).

- si $(a_1,b_1),(a_2,b_1)\in\mathcal{G}$, $e_{a_2,b_1} - e_{a_1,b_1}$ nulle pour $i=0$
$\rightsquigarrow$ $e_{a_2,b_1} - e_{a_1,b_1}$ harmonique en $i=1$ (mais pas en $j=1$).

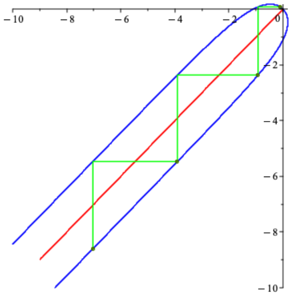
- Principe de la compensation (Adan, Wessels and Zijm, 90') : construire par récurrence (a_n,b_n), $n\in\mathbb{Z}$ telle que
  - (a_n,b_n) et $(a_{n+1},b_n)\in\mathcal{G}$
  - $\lim_{n\to\pm\infty} a_n = \lim_{n\to\pm\infty} b_n = -\infty$ assez vite.

Approche par compensation : $h_z(i,j) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ia_n(z)+jb_n(z)} - e^{ia_{n+1}(z)+jb_n(z)}$



- Principe de la compensation (Adan, Wessels and Zijm, 90') : construire par récurrence (a_n, b_n), $n \in \mathbb{Z}$ telle que
  - (a_n, b_n) et $(a_{n+1}, b_n) \in \mathcal{G}$
  - $\lim_{n\to\pm\infty} a_n = \lim_{n\to\pm\infty} b_n = -\infty$ assez vite.

Approche par compensation : $h_z(i,j) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ia_n(z)+jb_n(z)} - e^{ia_{n+1}(z)+jb_n(z)}$



Exemple : Pour $p_{-1,1} = p_{1,1} = p_{1,-1} = \frac{1}{3}$

$$\mathbb{P}(\tau_{(i,j)} = \infty) = 1 - \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^i 5^j} + \frac{1}{2^j 5^i} - \frac{1}{5^i 13^j} - \frac{1}{5^j 13^i} + \frac{1}{13^i 34^j} + \frac{1}{13^j 34^i} + \cdots.$$

(Nombres de Fibonacci F_{2n-1})

Frontière de Martin et noyau de Green

- Fonction de Green : $G(x,y) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(x + S_n = y, \tau_x > n)$.
- Théorie de Martin :

$$h \in \partial_m \mathcal{H} \Rightarrow \exists (z_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{Z}^2_{>0})^{\mathbb{N}},\ h(\cdot) = \lim_{n\to+\infty} \frac{G(\cdot, z_n)}{G(z_0, z_n)}.$$

Frontière de Martin et noyau de Green

- Fonction de Green : $G(x,y) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(x + S_n = y, \tau_x > n)$.
- Théorie de Martin :

$$h \in \partial_m \mathcal{H} \Rightarrow \exists (z_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{Z}^2_{>0})^{\mathbb{N}},\ h(\cdot) = \lim_{n\to+\infty} \frac{G(\cdot, z_n)}{G(z_0, z_n)}.$$

- Principe de la preuve du théorème :
  1. $z = (a,b) \in \mathcal{G}_0 \Rightarrow \nabla K(a,b) \in \mathcal{C} \Rightarrow$ Sous $\mathbb{P}^{e_z}$, $(S_n)_{n\geq 0}$ a une dérive $\mu_z \asymp \nabla K(a,b)$ dans $\mathcal{C}$.
  2. $\mathbb{P}^{e_z}(\tau_x = +\infty) > 0$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ a la même dérive μ_z après conditionnement sur $\{\tau_x = +\infty\}$.

Frontière de Martin et noyau de Green

- Fonction de Green : $G(x,y) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(x + S_n = y, \tau_x > n)$.
- Théorie de Martin :

$$h \in \partial_m \mathcal{H} \Rightarrow \exists (z_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{Z}^2_{>0})^{\mathbb{N}},\ h(\cdot) = \lim_{n\to+\infty} \frac{G(\cdot, z_n)}{G(z_0, z_n)}.$$

- Principe de la preuve du théorème :

1. $z = (a,b) \in \mathcal{G}_0 \Rightarrow \nabla K(a,b) \in \mathcal{C} \Rightarrow$ Sous $\mathbb{P}^{e_z}$, $(S_n)_{n\geq 0}$ a une dérive $\mu_z \asymp \nabla K(a,b)$ dans $\mathcal{C}$.
2. $\mathbb{P}^{e_z}(\tau_x = +\infty) > 0$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ a la même dérive μ_z après conditionnement sur $\{\tau_x = +\infty\}$.
3. Par un théorème limite locale, si $z_n \to +\infty$ avec $\frac{z_n}{|z_n|} \asymp \mu_z$, $\frac{G(x,z_n)}{G(x_0,z_n)} \to \overline{h}_z(x) = e^{(a,b)\cdot x}\mathbb{P}^{e_z}(\tau_x = \infty)$ avec $\overline{h}_z(x) \sim e^{(a,b)\cdot x}$ quand $x \to +\infty$.
4. On identifie $\overline{h}_z = h_z$ par le comportement à l'infini.

(Calcul similaire au bord de $\mathcal{G}_0$.)

Merci pour votre attention !