

Un théorème à la Ney et Spitzer pour des processus Markov additifs

Un quart de siècle pour un quart de plan

Théo Ballu

16 avril 2025

LAREMA, Université d'Angers

Développement asymptotique des fonctions de Green : généralités

Processus Markov additifs

Théorème principal et éléments de preuve

Développement asymptotique des fonctions de Green : généralités

- E est un espace d'états dénombrable, $P = (P(x, y))_{(x, y) \in E^2}$ une matrice de transition.
- $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps discret sur E de matrice de transition P .
- La chaîne est **irréductible** (le graphe sous-jacent est fortement connexe).
- La chaîne est **transiente** :

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{P}_x(\text{retour en } x) < 1.$$

La transience assure que la **fonction de Green**

$$\begin{aligned} G(y, x) &:= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_y (X_n = x) \\ &= \mathbb{E}_y [\text{nombre de passages en } x] \end{aligned}$$

est **finie**.

La transience assure que la **fonction de Green**

$$\begin{aligned} G(y, x) &:= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_y (X_n = x) \\ &= \mathbb{E}_y [\text{nombre de passages en } x] \end{aligned}$$

est **finie**.

Une origine $y \in E$ étant fixée, on cherche un développement asymptotique de $G(y, x)$ quand $x \rightarrow +\infty$ (en un sens à préciser selon l'espace E).

Ce problème a plusieurs motivations classiques.

Motivation 1 : la frontière de Martin (1/2)

Définition

- On fixe une origine $y_0 \in E$. Le noyau de Martin est

$$K(y, x) = \frac{G(y, x)}{G(y_0, x)}.$$

- La compactification de Martin est la plus petite compactification de E qui permet de prolonger continûment tous les $K(y, \cdot)$.
- La **frontière de Martin** ∂E est l'ensemble des points à l'infini ajoutés pour compactifier E .

Motivation 1 : la frontière de Martin (1/2)

Définition

- On fixe une origine $y_0 \in E$. Le noyau de Martin est

$$K(y, x) = \frac{G(y, x)}{G(y_0, x)}.$$

- La compactification de Martin est la plus petite compactification de E qui permet de prolonger continûment tous les $K(y, \cdot)$.
- La **frontière de Martin** ∂E est l'ensemble des points à l'infini ajoutés pour compactifier E .

Séquentiellement, $x_n \rightarrow x \in \partial E$ ssi $x_n \rightarrow +\infty$ et $(y \mapsto K(y, x_n))_{n \geq 0}$ converge simplement.

Motivation 1 : la frontière de Martin (1/2)

Définition

- On fixe une origine $y_0 \in E$. Le noyau de Martin est

$$K(y, x) = \frac{G(y, x)}{G(y_0, x)}.$$

- La compactification de Martin est la plus petite compactification de E qui permet de prolonger continûment tous les $K(y, \cdot)$.
- La **frontière de Martin** ∂E est l'ensemble des points à l'infini ajoutés pour compactifier E .

Séquentiellement, $x_n \rightarrow x \in \partial E$ ssi $x_n \rightarrow +\infty$ et $(y \mapsto K(y, x_n))_{n \geq 0}$ converge simplement.

Pour prolonger les noyaux, l'asymptotique de G est nécessaire.

Motivation 1 : la frontière de Martin (2/2)

Théorème (représentation de Poisson-Martin)

Pour toute fonction harmonique $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. $h = Ph$), il existe une mesure ν_h à support dans ∂E telle que pour tout $y \in E$,

$$h(y) = \int_{\partial E} K(y, \xi) d\nu_h(\xi).$$

Théorème (convergence)

Pour tout $x \in E$, X_n converge \mathbb{P}_x -ps vers une variable Z_x à valeurs dans ∂E .

Motivation 2 : modèles de physique statistique

- [Burton-Pemantle] calcule la loi d'un modèle de forêt couvrante à l'aide de déterminants faisant intervenir des fonctions de Green de marches aléatoires.
- [BBMR] utilise la décroissance de la fonction de Green pour étudier la forme limite du modèle de tas de sable abélien, variante "leaky".

Le théorème classique de Ney et Spitzer

Cadre :

- $E = \mathbb{Z}^d$,
- $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ où $(Y_k)_{k \geq 1}$ iid à support fini (pour simplifier), de covariance Σ ,
- $(X_n)_{n \geq 0}$ est irréductible,
- $\mathbb{E}[Y_1] \neq 0$ ou $d \geq 3$ (assure la transience).

Le théorème classique de Ney et Spitzer

Cadre :

- $E = \mathbb{Z}^d$,
- $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ où $(Y_k)_{k \geq 1}$ iid à support fini (pour simplifier), de covariance Σ ,
- $(X_n)_{n \geq 0}$ est irréductible,
- $\mathbb{E}[Y_1] \neq 0$ ou $d \geq 3$ (assure la transience).

Théorème (Ney et Spitzer, 1966)

- Si $\mathbb{E}[Y_1] = 0$, alors $G(0, x) \sim c (x \cdot \Sigma^{-1} x)^{-\frac{d-2}{2}}$.
- Si $\mathbb{E}[Y_1] \neq 0$, alors $G(0, x) \sim c(\hat{x}) \|x\|^{-\frac{d-1}{2}} \exp(-\gamma(\hat{x}) \cdot x)$ où $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}$.

Le théorème classique de Ney et Spitzer

Cadre :

- $E = \mathbb{Z}^d$,
- $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ où $(Y_k)_{k \geq 1}$ iid à support fini (pour simplifier), de covariance Σ ,
- $(X_n)_{n \geq 0}$ est irréductible,
- $\mathbb{E}[Y_1] \neq 0$ ou $d \geq 3$ (assure la transience).

Théorème (Ney et Spitzer, 1966)

- Si $\mathbb{E}[Y_1] = 0$, alors $G(0, x) \sim c (x \cdot \Sigma^{-1} x)^{-\frac{d-2}{2}}$.
- Si $\mathbb{E}[Y_1] \neq 0$, alors $G(0, x) \sim c(\hat{x}) \|x\|^{-\frac{d-1}{2}} \exp(-\gamma(\hat{x}) \cdot x)$ où $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}$.

Corollaire

- Dans le cas centré, la frontière de Martin est réduite à un point.
- Dans le cas décentré, la frontière de Martin est (homéomorphe à) la sphère \mathbb{S}^{d-1} de \mathbb{R}^d .

Dans

Asymptotics of Green Functions for Markov-additive Processes: an Approach via Dyadic Splitting of Integrals, Markov Processes and Related Fields, 2025,

on établit un analogue du théorème de Ney et Spitzer (cas décentré) pour une classe de processus **inhomogènes** appelés processus Markov additifs.

Processus Markov additifs

Processus Markov additifs (PMA) : définition

Idée générale : exploiter la structure additive de \mathbb{Z}^d mais ajouter des inhomogénéités.

Processus Markov additifs (PMA) : définition

Idée générale : exploiter la structure additive de \mathbb{Z}^d mais ajouter des inhomogénéités.

Espace d'états : $E = \mathbb{Z}^d \times A$. L'inhomogénéité est apportée par A .

Processus Markov additifs (PMA) : définition

Idée générale : exploiter la structure additive de \mathbb{Z}^d mais ajouter des inhomogénéités.

Espace d'états : $E = \mathbb{Z}^d \times A$. L'inhomogénéité est apportée par A .

Un PMA sur E est une chaîne de Markov dont les **sauts sont invariants selon \mathbb{Z}^d** , *i.e.*

$$\forall x, x' \in \mathbb{Z}^d, \forall i, j \in A, \quad \mathbb{P}((x, i) \rightarrow (x', i')) = \mathbb{P}((\mathbf{0}, i) \rightarrow (x' - x, i')).$$

- Lorsque $A = \mathbb{N}$, on retrouve les processus sur des demi-espaces, notamment étudiés par I. Ignatiouk-Robert.

- Lorsque $A = \mathbb{N}$, on retrouve les processus sur des demi-espaces, notamment étudiés par I. Ignatiouk-Robert.
- À partir de maintenant, pour nous, $A = \{1, \dots, p\}$ est **fini**.

Représentation du processus sur $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, p\}$

Deux manières de se représenter le processus : multicolore ou multicouche.

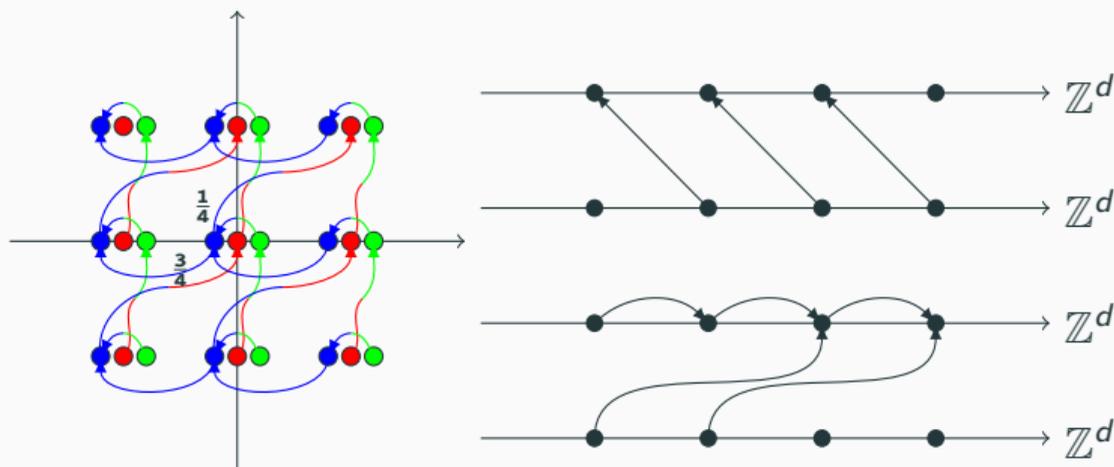


Figure 1: À gauche, $d = 2$ et $p = 3$. À droite, $d = 1$ et $p = 4$.

Simulations du processus

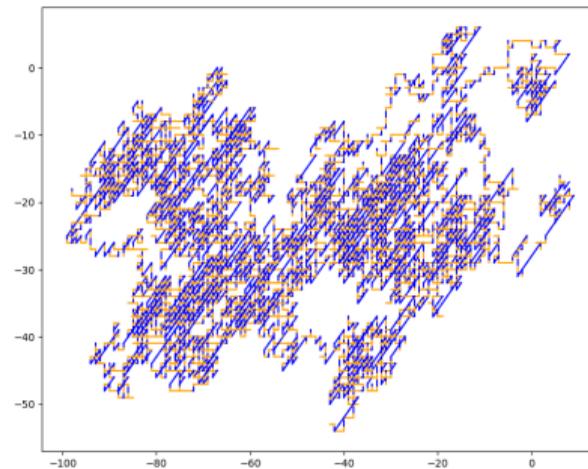
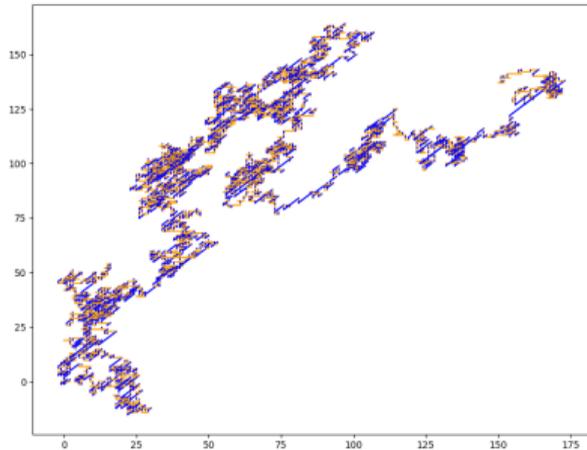


Figure 2: $d = p = 2$

- Dans \mathbb{Z}^d , pour une somme iid de loi de saut μ , la loi de X_n est donnée par μ^{*n} .

- Dans \mathbb{Z}^d , pour une somme iid de loi de saut μ , la loi de X_n est donnée par μ^{*n} .
- Ici, on a p^2 types de sauts : une mesure $\mu_{i,j}$ sur \mathbb{Z}^d code les sauts de la couleur i à la j pour chaque $(i,j) \in \{1, \dots, p\}^2$. L'analogie de la loi μ est la **matrice de mesures** $\mu = (\mu_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$

- Dans \mathbb{Z}^d , pour une somme iid de loi de saut μ , la loi de X_n est donnée par $\mu^{\star n}$.
- Ici, on a p^2 types de sauts : une mesure $\mu_{i,j}$ sur \mathbb{Z}^d code les sauts de la couleur i à la j pour chaque $(i,j) \in \{1, \dots, p\}^2$. L'analogie de la loi μ est la **matrice de mesures** $\mu = (\mu_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$
- La loi de X_n est alors donnée par $\mu^{\star n}$ où \star est un produit **matriciel** de convolution.

- Dans \mathbb{Z}^d , pour une somme iid de loi de saut μ , la loi de X_n est donnée par $\mu^{\star n}$.
- Ici, on a p^2 types de sauts : une mesure $\mu_{i,j}$ sur \mathbb{Z}^d code les sauts de la couleur i à la j pour chaque $(i,j) \in \{1, \dots, p\}^2$. L'analogie de la loi μ est la **matrice de mesures** $\mu = (\mu_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$
- La loi de X_n est alors donnée par $\mu^{\star n}$ où \star est un produit **matriciel** de convolution.
- L'analogie de la fonction caractéristique est la matrice des transformées de Fourier $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$, prise coordonnée par coordonnée. Son **rayon spectral** joue un rôle important.

Le cas décentré (1/2)

On veut définir la notion de **drift** pour se placer dans le cas décentré. On dispose de p^2 drifts dans \mathbb{Z}^d : les $\mathbb{E}[\mu_{i,j}]$. Comment les combiner pour obtenir la bonne notion de drift ?

Le cas décentré (1/2)

On veut définir la notion de **drift** pour se placer dans le cas décentré. On dispose de p^2 drifts dans \mathbb{Z}^d : les $\mathbb{E}[\mu_{i,j}]$. Comment les combiner pour obtenir la bonne notion de drift ?

La projection de (X_n) sur $\{1, \dots, p\}$ est une chaîne de Markov qui possède une proba invariante π .

Définition

Le drift du processus est

$$\mathbb{E}[\mu] := \sum_{i,j \in \{1, \dots, p\}} \pi_i \mathbb{E}[\mu_{i,j}].$$

Plus le processus passe du temps sur la couleur i , plus les drifts partant de i comptent.

Pour une loi μ sur \mathbb{Z}^d , $\nabla \hat{\mu}(0) = i\mathbb{E}[\mu]$.

Ici, on a :

Proposition

Notons $\lambda(\theta)$ la valeur propre dominante de $\hat{\mu}(\theta)$. Alors

$$\nabla \lambda(0) = i\mathbb{E}[\mu].$$

Théorème principal et éléments de preuve

Théorème (B. et Dussaule (indépendamment))

On suppose le processus irréductible, apériodique, avec des moments exponentiels finis à tous les ordres et décentré.

Alors, quand $\|x\| \rightarrow +\infty$,

$$G((0, i), (x, j)) \sim C_{i,j}(\hat{x}) \|x\|^{-\frac{d-1}{2}} e^{-\gamma(\hat{x}) \cdot x}$$

où $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}$. De plus, dès que x n'est pas dans la direction du drift, $\gamma(\hat{x}) \cdot x > 0$.

Le taux de décroissance γ ne dépendant pas des couleurs i et j , on obtient :

Corollaire

*La frontière de Martin est (homéomorphe à) **une** sphère de \mathbb{S}^{d-1} de \mathbb{R}^d .*

La preuve combine des techniques de Woess (preuve du théorème classique de Ney et Spitzer) et de Babillot (processus Markov additifs à espace continu).

Étapes :

1. Il suffit de travailler dans la direction du drift.
2. Formule intégrale de la fonction de Green.
3. Développement asymptotique de l'intégrale.

Étape 1 : transformation de Doob pour changer la direction du drift (1/3)

Définition

La transformée de Laplace (réelle) est

$$\forall c \in \mathbb{R}^d, \quad L\mu(c) := (L\mu_{i,j}(c))_{1 \leq i,j \leq p} := \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{c \cdot x} \mu_{i,j}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq p} .$$

Étape 1 : transformation de Doob pour changer la direction du drift (1/3)

Définition

La transformée de Laplace (réelle) est

$$\forall c \in \mathbb{R}^d, \quad L\mu(c) := (L\mu_{i,j}(c))_{1 \leq i,j \leq p} := \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{c \cdot x} \mu_{i,j}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq p} .$$

Si $\rho(L\mu(c)) = 1$ et $\varphi_c \in (\mathbb{R}_+^*)^d$ est un vecteur propre de Perron-Frobenius associé, alors la famille de mesures

$$(\mu_c)_{i,j}(x) = \frac{(\varphi_c)_j}{(\varphi_c)_i} e^{c \cdot x} \mu_{i,j}(x)$$

définit un PMA. On l'appelle **transformée de Doob** de paramètre c .

Étape 1 : transformation de Doob pour changer la direction du drift (2/3)

Théorème (Hennequin, 1963)

Le drift de la transformée de Doob est

$$\mathbb{E}[\mu_c] = \nabla(\rho L\mu)(c) \neq 0.$$

L'application

$$\begin{aligned} \{c \in \mathbb{R}^d \mid \rho(L\mu)(c) = 1\} &\longrightarrow \mathbb{S}^{d-1} \\ c &\longmapsto \frac{\nabla(\rho \circ L\mu)(c)}{\|\nabla(\rho \circ L\mu)(c)\|} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme.

Étape 1 : transformation de Doob pour changer la direction du drift (2/3)

Théorème (Hennequin, 1963)

Le drift de la transformée de Doob est

$$\mathbb{E}[\mu_c] = \nabla(\rho L\mu)(c) \neq 0.$$

L'application

$$\begin{aligned} \{c \in \mathbb{R}^d \mid \rho(L\mu)(c) = 1\} &\longrightarrow \mathbb{S}^{d-1} \\ c &\longmapsto \frac{\nabla(\rho \circ L\mu)(c)}{\|\nabla(\rho \circ L\mu)(c)\|} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme.

- La surjectivité permet de placer le drift dans la direction souhaitée.
- Le taux de décroissance exponentielle γ est la bijection réciproque.

Étape 1 : transformation de Doob pour changer la direction du drift (3/3)

La fonction de Green G_c de la transformée de Doob de paramètre c est

$$G_c((0, i), (x, j)) = c_{i,j} e^{c \cdot x} G((0, i), (x, j)).$$

Étape 1 : transformation de Doob pour changer la direction du drift (3/3)

La fonction de Green G_c de la transformée de Doob de paramètre c est

$$G_c((0, i), (x, j)) = c_{i,j} e^{c \cdot x} G((0, i), (x, j)).$$

Dans la décroissance $\|x\|^{-\frac{d-1}{2}} e^{-\gamma(\hat{c}) \cdot c}$ à prouver, la transformée de Doob tue la décroissance exponentielle. Il ne reste que la décroissance polynomiale à prouver.

Étape 2 : formule intégrale de la fonction de Green

On établit la formule intégrale

$$G((0, i), (x, j)) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \left((I_p - \hat{\mu}(\theta))^{-1} \right)_{i,j} e^{-ix \cdot \theta} d\theta.$$

La finitude de cette intégrale montre au passage la transience du processus.

Étape 3 : développement asymptotique de l'intégrale (1/3)

L'intégrale

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} (\mathbb{I}_\rho - \widehat{\mu}(\theta))^{-1} e^{-ix \cdot \theta} d\theta$$

a une **singularité** en 0 car $\rho(\widehat{\mu}(0)) = 1$.

Étape 3 : développement asymptotique de l'intégrale (1/3)

L'intégrale

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} (I_\rho - \widehat{\mu}(\theta))^{-1} e^{-ix \cdot \theta} d\theta$$

a une **singularité** en 0 car $\rho(\widehat{\mu}(0)) = 1$.

On fait un DL à l'ordre 2 en 0. En remplaçant l'intégrande par son DL, on a l'asymptotique voulue pour G .

Étape 3 : développement asymptotique de l'intégrale (1/3)

L'intégrale

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} (I_\rho - \widehat{\mu}(\theta))^{-1} e^{-ix \cdot \theta} d\theta$$

a une **singularité** en 0 car $\rho(\widehat{\mu}(0)) = 1$.

On fait un DL à l'ordre 2 en 0. En remplaçant l'intégrande par son DL, on a l'asymptotique voulue pour G .

Il reste à contrôler l'erreur commise en remplaçant l'intégrande par son DL.

Étape 3 : développement asymptotique de l'intégrale (2/3)

Dans le contrôle du terme d'erreur, il reste la transformée de Fourier d'une fonction ayant une singularité en 0, du type $\frac{1}{i\mathbb{E}[\mu]\cdot\theta - C\|\theta\|^2}$.

↪ Comportement différent selon la direction, avec direction $\mathbb{E}[\mu]$ privilégiée.

Étape 3 : développement asymptotique de l'intégrale (2/3)

Dans le contrôle du terme d'erreur, il reste la transformée de Fourier d'une fonction ayant une singularité en 0, du type $\frac{1}{i\mathbb{E}[\mu] \cdot \theta - C\|\theta\|^2}$.

↔ Comportement différent selon la direction, avec direction $\mathbb{E}[\mu]$ privilégiée.

Dans la transformée de Fourier, on découpe l'intégrale selon des couronnes adaptées à la géométrie de la singularité, permettant un contrôle fin de la singularité.

Étape 3 : développement asymptotique de l'intégrale (3/3)

Ce découpage (appelé *dyadique* par Babillot) permet de contrôler le terme d'erreur, ce qui achève l'ébauche de preuve.

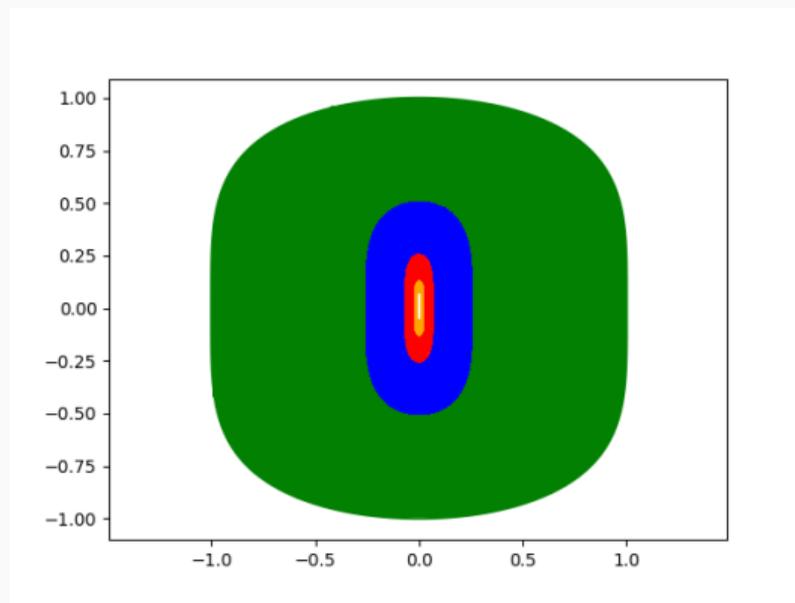


Figure 3: Couronnes adaptées à la géométrie de la singularité. Verticale : direction du drift.

Bibliographie

- Babillot, *Théorie du renouvellement pour des chaînes semi-markoviennes transientes*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 1988
- Ballu, *Asymptotics of Green functions for Markov-additive processes: an approach via dyadic splitting of integrals*, Markov Processes and Related Fields, 2025
- Ballu, Boutillier, Mkrtchyan and Raschel, *Limit shape of the leaky Abelian sandpile model with multiple layers*, preprint arXiv, 2025
- Burton and Pemantle, *Local Characteristics, Entropy and Limit Theorems for Spanning Trees and Domino Tilings Via Transfer-Impedances*, The Annals of Probability, 1993
- Dussaule, *The Martin boundary of a free product of abelian groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 2020
- Ney and Spitzer, *The Martin boundary for random walk*, Trans. Amer. Math. Soc., 1966
- Woess, *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge University Press, 2000